Calcul Différentiel

Le cadre général théorique est une fonction F définie sur un ***ouvert*** U d'un evn E de dimension n à valeurs dans un evn F de dimension p. « *Rapporté* » à des bases, ceci équivaut à la donnée de

$$\begin{array}{rccl} f: & U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longrightarrow & \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_p(x_1,\dots,x_n)\big) \end{array}$$

Etant donné que, ***théoriquement***, l'existence d'une « *notion* » pour f (limite, continuité, dérivée partielle, C^1,...) équivaut à celle de ***chacune*** des fonctions-coordonnées, nous nous contenterons dans toute la suite d'un exposé avec $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. A l'instar des fonctions ***d'une*** variable réelle où on se place en général sur un intervalle, pour les fonctions ***multi-variables***, on se place en général sur un ouvert. Le plus souvent, dans la pratique de la PSI, on aura $n = 2$ ou $n = 3$. Rappelons que le cas $n = 2$ a ***déjà été étudié*** en classe de Sup.

1 Dérivées Partielles Premières

1.1 Généralités

Dérivée suivant un Vecteur en un Point :

Soit $f : (x_1,\dots,x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}$ et $A(a_1,\dots,a_n) \in U$ avec U ouvert et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$.
On dit que f admet une dérivée partielle en A ***suivant le vecteur*** $\overrightarrow{v}$ ssi l'application ***d'une varaible réelle*** $t \longrightarrow f(A + t\overrightarrow{v})$ admet une dérivée en $t = 0$. On la note alors $\partial_{\overrightarrow{v}} f(A)$.

Applications Partielles en un Point :

Soit $f : (x_1,\dots,x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}$ et $A(a_1,\dots,a_n) \in U$ avec U ouvert.
On appelle ***i-ième application partielle de f en*** A, l'application d' ***une seule variable réelle*** :

$$f_{i,A} : x_i \in I_i \longrightarrow f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

Remarques

- Comme U est ouvert, I_i contient un ***intervalle ouvert*** contenant a_i. Si U est convexe, c'est un intervalle ouvert.
- Dans le cas particulier $n = 2$, avec $M_0 = (x_0, y_0)$, on appelle ***1re application partielle en*** M_0, l'application $f_{1,M_0} : x \longrightarrow f(x, y_0)$ et ***2e application partielle en*** M_0, l'application $f_{2,M_0} : y \longrightarrow f(x_0, y)$.
- Les applications partielles sont des applications ***d'une seule variable réelle*** d'où leur intérêt pratique pour un maniement plus aisé.
- Si f est ***continue*** en $M_0(x_0, y_0)$ (notion vue dans le cours sur les evn), alors la 1re (rp. 2e) application partielle de f en M_0 est ***continue*** en x_0 (rp. en y_0). Réciproque fausse; cela se comprend : la continuité partielle est la continuité « *seulement suivant les axes* ».

  Contre-exemple : :
  Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Les 2 applications partielles en $O = (0,0)$ sont : $f_{1,O}(x) = f(x,0) = 0$ et $f_{2,O}(y) = f(0,y) = 0$.
elles sont donc ***continues*** en 0 (attention aux confusions ! en 0, pas en $(0,0)$).
Par contre, l'application f n'est ***pas continue*** en $O = (0,0)$ par caractérisation séquentielle :

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^2}{2/n^2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Rappel : pour une fonction d'une variable x avec $x_0 \in I$ intervalle, $x \to f(x)$ est dérivable en x_0 ssi, par translation, $\varphi : t \to f(t + x_0)$ est dérivable en $t = 0$ et alors $f'(x_0) = \varphi'(0)$. Ceci pour aider à comprendre cette définition :

Dérivée Partielle Première en un Point : On dit que f ***admet une dérivée partielle première*** par rapport à la i-ième variable ***en*** A ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
(i) L'application d'***une variable réelle*** $\varphi : t \longrightarrow f(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est ***dérivable en*** $t = 0$.
(ii) La i-ième ***application partielle*** première en A $f_{i,A}$ est ***dérivable*** en $x_i = a_i$.

$$\text{On note alors } \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \varphi'(0) = f'_{i,A}(a_i)$$

Remarques

- La dérivée partielle première en $A = (a_1, \dots, a_n)$, par rapport à x_i, peut aussi se noter $\partial_i f(A)$.
- On a $\varphi(t) = f\left(A + t\overrightarrow{e_i}\right)$ où $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  Par conséquent, l'existence (et la valeur) de la dérivée partielle première en la i-ième variable au point A est ***rigoureusement équivalente*** à celle de la dérivée au point A suivant le vecteur $\overrightarrow{e_i}$. Les dérivées partielles premières en un point A suivant les n variables sont en fait les n dérivées suivant les n « *axes* ».
- Les opérateurs « *dérivée partielle* » sont linéaires. On peut écrire pour $A(a_1, \dots, a_n)$:
$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i}(A) = \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) + \beta\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(A)$$
- Toutes les « *formules* » suivantes restent vraies (sous réserve de l'existence des dérivées partielles premières de f et g en la i-ième variable) :
$$\frac{\partial(f \times g)}{\partial x_i}(A) = f(A)\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(A) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) g(A) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{f}{g}\right](A) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) g(A) - \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(A)\, f(A)}{g^2(A)}$$
- Dans la pratique, on dérive partiellement « *normalement* » tant qu'il n'y a pas de « *problèmes* » au niveau des fonctions usuelles. Sinon, il faudra revenir à la définition !

Exercice 1 : Etude de l'existence et la valeur des dérivées partielles premières de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ sur $U = \mathbb{R}^2$

On peut déjà remarquer que $\mathbb{R}^2$ est bien un ouvert.

Etude sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, par « *composition* » de fonctions usuelles, les dérivées partielles ***existent et valent*** :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \times (x^2+y^2) - x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Etude de l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Pour regarder l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, on doit regarder $\varphi : t \longrightarrow f(0+t,0) = \frac{1}{t}$. Cette application étant clairement ***non dérivable en*** $t=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ***n'existe pas***.

Etude de l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Pour regarder l'existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, on doit regarder $\psi : t \longrightarrow f(0,0+t) = 0$. Cette application étant clairement ***dérivable en*** $t=0$ de ***dérivée*** 0 , $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ***existe*** et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

1.2 Applications de Classe C^1

La notion de dérivabilité pour une fonction multivariables (« *variable départ* » $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$) est la notion de ***différentiabilité***. Elle n'est pas au programme de PSI : on verra juste comment ***écrire*** la différentielle en un point (la fonction-dérivée si vous préférez) à partir des dérivées partielles premières. La notion de différentiabilité (ou dérivabilité) d'une fonction multi-variables est beaucoup plus forte (et plus complexe) que celle de l'existence des dérivées partielles premières, qui, rappelons-le, ne sont que les dérivées suivant les « *axes* ». Les n dérivées partielles premières en un point A peuvent toutes exister mais la différentielle au point A, elle, ne pas exister. Néanmoins, avec la ***continuité***, les 2 notions se « *retrouvent* ». C'est pour cela qu'à votre programme, vous avez la définition :

Fonction Multi-Variable de Classe C^1 **:**

Soit $f : (x_1,\dots,x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1,\dots,x_n)$ et $A(a_1,\dots,a_n) \in U$ avec U ouvert.

f est dite de classe C^1 sur ***l'ouvert*** U ssi les n dérivées partielles premières ***existent*** et sont ***continues*** en ***tout*** point A de U.

Propriétés :

- La plupart des propriété des fonctions C^1 d'une variable réelle (départ $\mathbb{R}$) sont aussi vérifiées :
- ***Si*** f ***est*** C^1 sur un ouvert U, alors elle est ***continue*** sur U (et sa différentielle (« *dérivée* ») est continue).
- Les sommes, produits, compositions de fonctions C^1 sont elles-mêmes C^1. Tous les polynômes multivariables en $(x_1,\dots,x_n)$ sont évidemment C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$.

Développement Limité à l'Ordre 1 :

Soit $f : (x_1,\dots,x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1,\dots,x_n)$ de classe C^1 sur U ouvert et $A(a_1,\dots,a_n) \in U$.

Alors f admet un ***développement limité*** à l'ordre 1 en tout A :

$$f(A+H) = f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) = \underbrace{f(a_1,\dots,a_n)}_{f(A)} + \underbrace{h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)+\cdots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)}_{df(A)(H) = \left(\overrightarrow{\nabla} f(A)\,|\,H\right)} + \mathbf{o}\left(\|H\|\right)$$

Remarques

- $\mathbf{o}\left(\|H\|\right) = \|H\|\,\varepsilon(H)$ avec $\lim\limits_{H\to(0,\dots,0)} \varepsilon(H) = 0$. On peut l'écrire abusivement $o(H)$ mais je vous le déconseille.
- Le Dl à l'ordre 1 peut s'écrire avec un autre vocabulaire :

$$f(A+H) = f(A) + df(A)(H) + \mathbf{o}\left(\|H\|\right) = f(A) + \left(\overrightarrow{\nabla} f(A)\,|\,H\right) + \mathbf{o}\left(\|H\|\right)$$

Avec l'expression de la différentielle (plus mathématique) ou du gradient (plus physique), voir plus loin.

- Pour $n=2$, cas le plus simple, on peut utiliser plusieurs écritures voisines par translation / changement de variables :

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$
$$f(x,y)=f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+o\left(\|(x,y)\|\right)$$
$$f(x,y)=f(a,b)+(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+o\left(\|M-A\|\right)$$

Le terme d'ordre 1 du dl « *justifie* » l'approximation usuelle $\Delta f \simeq \Delta_x\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta_y\frac{\partial f}{\partial y}$

Différentielle en un Point :
Soit $f:(x_1,\dots,x_n)\in U\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U ouvert et $A(a_1,\dots,a_n)\in U$.
On appelle différentielle au point A et on note $df(A)$ la ***forme linéaire*** définie sur $\mathbb{R}^n$:

$$df(a):(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(A)+\cdots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

Remarques

- La différentielle df de f est donc une application de $df:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$
- En supposant réalisées toutes les conditions d'existence des différentielles (par classe C^1 à votre programme), on a les formules suivantes que les élèves « *ambitieux* » peuvent retenir :

  $d\left(\alpha f+\beta g\right)(A)=\alpha df(A)+\beta dg(A)$ $\quad d\left(f\times g\right)(A)=f(a)dg(A)+g(A)df(A)$ $\quad d\left(f\circ g\right)(A)=f'\left(g(A)\right)dg(A)$

  Dans la dernière formule, f est nécessairement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (d'où la dérivée), je vous laisse y réfléchir.

Exemple : Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Alors sa différentielle en tout point est elle-même, $d\varphi(A)=\varphi$.

Une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme $(x_1,\dots,x_n)\longrightarrow\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$. C'est donc un polynôme (homogène de degré 1) en les n variables, φ est donc C^1 et immédiatement pour tout $A=(a_1,\dots,a_n)$ de l'ouvert $\mathbb{R}^n$, on a $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(A)=\alpha_i$. Il suit :

$$\forall\, H=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\ d\varphi(A)(H)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(A)=\sum_{i=1}^{n}h_i\alpha_i=\varphi(H)$$

On munit ici $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Je rappelle alors, comme dans tout ev euclidien E d'ailleurs, il y a isomorphisme entre $E=R^n$ et l'ev des formes linéaires sur E, cad $\mathscr{L}\left(E,\mathbb{R}\right)$. Cet isomorphisme « *canonique* » est :

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}\left(E,\mathbb{R}\right)\\ x & \longrightarrow & \left[y\to\left(x\,|\,y\right)\right]\end{array}\right.$$

Toute forme linéaire sur $E=\mathbb{R}^n$ peut donc s'écrire de façon unique comme un produit scalaire avec un vecteur fixe (le x), d'où :

Gradient en un Point : Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U ouvert et $A(a_1,\dots,a_n)\in U$.
Il existe un unique vecteur, appelé ***gradient de*** f au point A, et noté $\overrightarrow{\nabla}f(A)$ vérifiant :

$$\forall\, H=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\ df(A)(h)=\left(\overrightarrow{\nabla}f(A)\,|\,H\right)$$

Remarques

- Comme $df(a)(h) = \sum_{k=1}^{n} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, qu'on reconnaît l'expression du produit scalaire canonique et que la base canonique est orthonormée, on a et ***on retiendra surtout :*** $\boxed{\overrightarrow{\nabla} f(A) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)}$

1.3 Dérivées Partielles Composées

Ici, vous avez de la chance, aucune théorie, il faut « *savoir faire* », c'est tout. On rappelle pour une variable :

$$u^*(x) = u(y(x)) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Beaucoup de personnes omettent le * sur le u. Je préfère le laisser car ***mathématiquement*** c'est une autre fonction, c'est le u **composé** (le u où y est « *changé* » en x).
Pour les dérivées partielles, c'est à peu près la même idée, mais en plus compliqué, on applique la ***règle de la chaine***. On supppose toutes les fonctions de classe C^1 pour pouvoir dériver :

Règle de la chaîne 1 :

$$f^*(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \quad \Longrightarrow \quad \frac{df^*}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{\mathrm{d}t}$$

« *L'usage préfère* » que l'on mette des ***dérivées rondes*** pour les fonctions à plusieurs variables et des ***dérivées droites*** pour les fonctions d'1 variable.

Un deuxième exemple : on se donne une fonction « *genre changement de variables* », par exemple :
$(u, v) \longrightarrow (x = x(u, v), y = y(u, v))$. Ainsi $f(x, y)$ « *devient* » $f^*(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big) = f(x, y)$

Concrétisons en prenant des u, v bien connus comme le ***« passage en polaires »*** :

$$\begin{tikzcd}
U = \left]0,+\infty\right[\times \left[\alpha, \alpha+2\pi\right[\subset \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \arrow[r] & \mathbb{R} \\
(\rho,\theta) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "f^* = f\circ\varphi"'] & \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \end{array}\right. \arrow[r, "f"] & f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)
\end{tikzcd}$$

φ est ici ***bijective*** de U sur $\varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ***mais*** U n'est pas un ouvert...

Règle de la chaîne 2 :

$$f^*(\rho,\theta) = f\big(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)\big) = f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^*}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial f^*}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

1.4 Applications Aux Courbes et Surfaces

Une ***courbe*** peut être définie mathématiquement de 2 façons :

- ***Ou comme*** le support / tracé d'un arc paramétré. Un arc paramétré $\gamma = (I, F)$ est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application d'une variable réelle t dans le plan euclidien ou l'ev euclidien usuel de dimension 3. D'un point de vue pratique, ceci équivaut à la donnée d'une application $F : t \in I \longrightarrow \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ ou $F : t \in I \longrightarrow \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$. Le cas le plus simple, étudié au lycée, est le cas où le paramètre est x : $F : x \longrightarrow \big(x, f(x)\big)$, cad on se donne $y = f(x)$. On peut aussi se donner des fonctions-coordonnées polaires, cad 2 fonctions $\big(\rho(t), \theta(t)\big)$ ou, dans $\mathbb{R}^3$, la donnée des 3 fonctions-coordonnées semi-polaires ou sphériques.
- ***Ou comme*** un ensemble de points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x, y) = 0$ (équation dite ***implicite***). C'est le cas ici de notre brève étude qui va préciser la tangente.

Je rappelle que pour une courbe, cas du support de $y = f(x)$ avec f dérivable, la ***tangente*** au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ a pour équation $y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0)$. Pour un arc paramétré plus général $\big(x(t), y(t)\big)$, on est obligé de se placer dans le cas d'un point ***régulier*** M_0, cad le cas où les deux dérivées $x'(t_0), y'(t_0)$ ne sont pas toutes les deux nulles. Dans ce cas l'équation de la tangente, qui est la droite ***passant par*** $M_0\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ et ***dirigée*** par le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t_0)} = \overrightarrow{\frac{dF}{dt}}(t_0) = \big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$, est donnée par :

$$x'(t_0)\ \big(y - y(t_0)\big) - y'(t_0)\ \big(x - x(t_0)\big) = 0$$

Définition : Soit une ***courbe*** du plan définie par une équation du type $f(x, y) = 0$ avec f de classe C^1.
Un point M est dit ***régulier*** ssi $\vec{n} = \overrightarrow{\nabla f}(M) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)\right) \neq (0, 0)$
En un point régulier M, on appelle ***tangente*** en M à la courbe, la ***droite*** passant par M et ***orthogonale*** à $\vec{n}$.

L'équation de la tangente en un point régulier $M_0(x_0, y_0)$ (cad vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$) est alors donnée par :

$$\big(\vec{\nabla} f(M_0) \,|\, M - M_0\big) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\ (x - x_0)\ +\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\ (y - y_0) = 0$$

Remarques

- ***Attention !*** une équation dans $\mathbb{R}^3$ du type $f(x, y, z) = 0$ ne définit pas une courbe mais une ***surface***, voir ci-après. Pour définir ***implicitement*** une courbe en dimension 3, il faut deux équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$ (l'intersection de 2 surfaces est une courbe en général).
- Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau (cad $f(x, y) = k$) et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f : $\varphi : t \longrightarrow f\big(A + t\, \vec{\nabla} f(A)\big)$ est croissante au voisinage de 0 (donc « *de* » A)

  Démo : $\varphi'(0) = \big(f \circ g\big)'(0) = g'(0)\, df\big(g(0)\big) = \big(\vec{\nabla} f(g(0)) \,|\, g'(0)\big) = \big(\vec{\nabla} f(A) \,|\, \vec{\nabla} f(A)\big) = \|\vec{\nabla} f(A)\|^2 > 0$

Exemple : On se donne l'ellipse d'équation $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$. Donnez l'équation de la tangente en chaque point

On pose $F(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2$ qui est de classe C^1 en tant que polynôme (de degré 2) en les 2 variables x, y. On calcule aisément

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y + 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 1 \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 4x + y - 4 & = & 0 \\ x + 2y - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le point $(1, 0)$ ne vérifiant pas $F(1, 0) = 0$, ce n'est pas un point de l'ellipse. Par conséquent, tout point de la courbe est ***régulier*** et l'équation de la tangente en $M(x, y)$ est donnée par (***Attention !*** vu l'utilisation de x, y, les

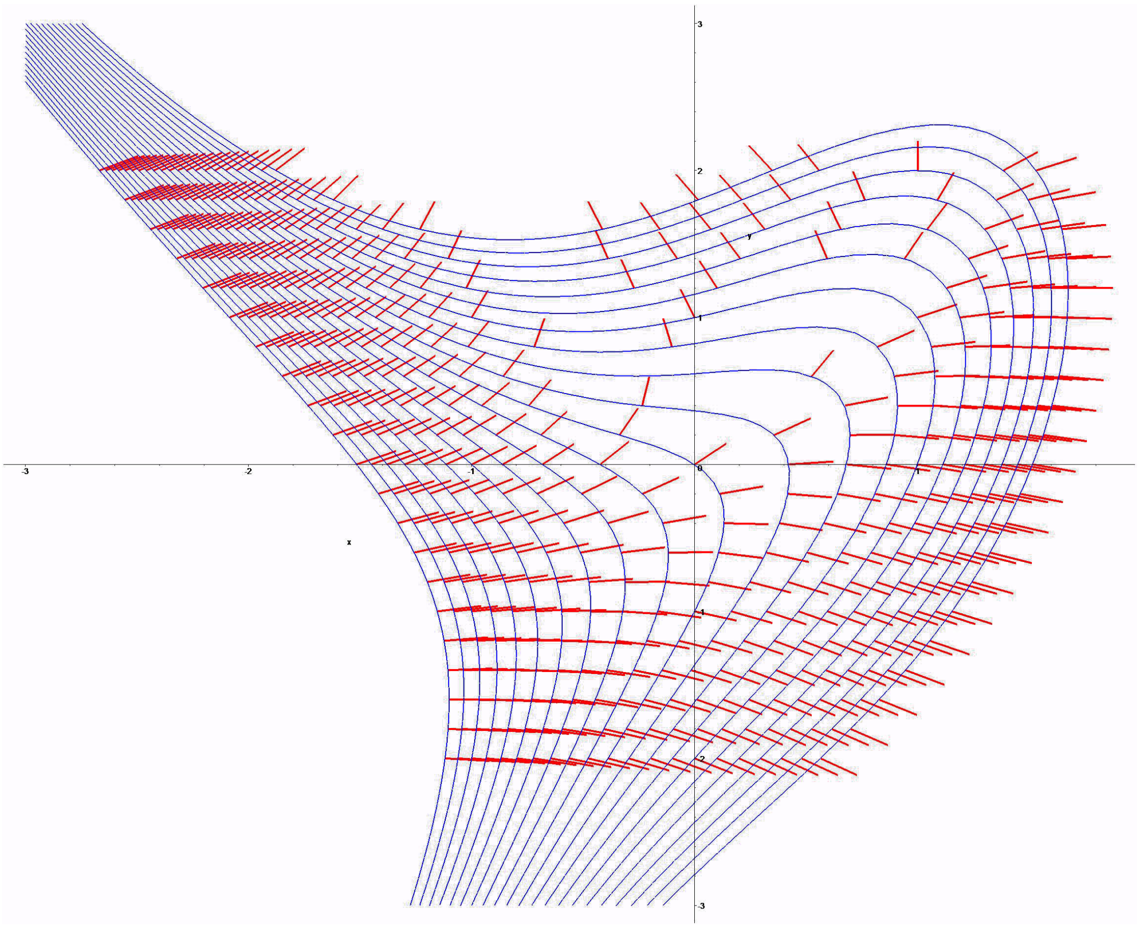


FIGURE 1 – Lignes de Niveau et Gradients pour $F(x,y) = x^3 - 2xy + y^2 + x + y$

2 paramètres génériques d'une droite seront plutôt notés ici X et Y) :

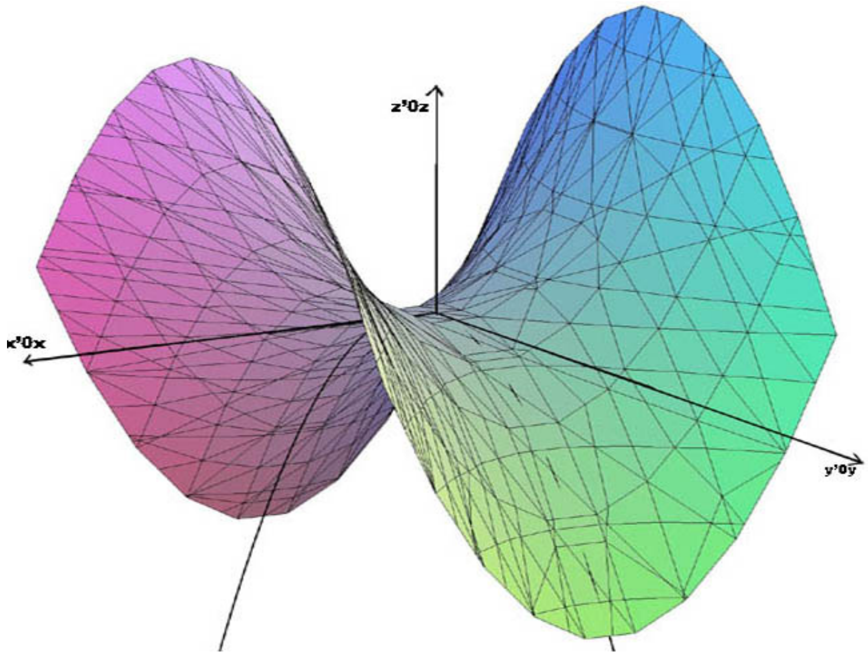
$$(4x + y + 4)\ (X - x) + (x + 2y - 1)\ (Y - y) = 0$$

De même, une ***surface*** peut être définie ***ou*** comme un ensemble de points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(x,y,z) = 0$ (équation dite implicite), avec le cas particulier simple $z = f(x,y)$, ***ou*** comme support d'une ***nappe paramétrée*** (pas au programme) : $x = x(u,v)\quad y = y(u,v)\quad z = z(u,v)$ (Il faut mettre 2 paramètres, bidimensionnel, sinon c'est une courbe). On pourrait aussi se donner une équation implicite entre les coordonnées sphériques $f(\rho,\theta,\varphi) = 0$ mais ceci ne rentre pas dans le cadre du programme. On s'intéresse ici au calcul du plan tangent pour une surface.

Définition : Soit une surface de R^3 définie par une équation du type $f(x,y,z) = 0$ avec f de classe C^1.
Un point M est dit ***régulier*** ssi $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\nabla} f(M) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M), \dfrac{\partial f}{\partial y}(M), \dfrac{\partial f}{\partial z}(M)\right) \neq (0,0,0)$
En un point régulier M, on appelle ***plan tangent*** en M à la surface, le ***plan*** passant par M et ***orthogonal*** à $\overrightarrow{n}$.

Exercice : On considère la surface appelée ***paraboloïde hyperbolique*** d'équation $z - x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 = 0$. Donnez l'équation du plan tangent en tout point régulier.

On pose $f(x,y,z) = z - x^2 - \frac{1}{2}y^2$ qui est C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On calcule : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -2x \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = y \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1.$
L'équation de tout point $M(x,y,z)$ du plan normal à $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et passant par $M_0(x_0,y_0,z_0)$ s'écrit « *théoriquement* » $\left(\overrightarrow{M_0M} \,|\, \overrightarrow{n_0}\right) = 0$ soit : $\quad -2x_0\ (X - x_0) + y_0(Y - y_0) + (Z - z_0) = 0$



2 Fonctions de classe C^2 / Dérivées Partielles Secondes

2.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Dans toute la suite, sans que cela soit nécessairement répété à chaque fois, on se donne « *implicitement* » une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $f(x_1, \ldots, x_n)$, fonction que l'on suppose de ***classe*** C^1 sur l'***ouvert*** U. On rappelle que ceci équivaut à ***l'existence et la continuité*** de toutes les dérivées partielles ***premières*** $(1 \leq i \leq n)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ et ce, ***pour tout*** $M \in U$.

2.2 Définitions

Définition : Soit f C^1 sur U ouvert. On dit que f ***admet des dérivées partielles secondes*** par rapport aux n variables x_j ssi les n fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_i} : M(x_1, \ldots, x_n) \in U \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$ admettent des dérivées partielles par rapport aux variables x_j. on note alors :

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Définition : f est de classe C^2 sur l'***ouvert*** U ssi les n^2 dérivées partielles ***secondes*** existent et sont ***continues*** sur U.

Remarques

- Attention ! aux 2 positions ***différentes*** du carré dans la deuxième notation.
- Tous les polynômes multivariables en $(x_1, \ldots, x_n)$ sont C^2 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}^n$. De même, toutes les applications linéaires, bilinéaires, n-linéaires ***en dimension finie*** sont C^2 (et même C^∞) sur un ev E de dimension finie n quelconque. Je rappelle d'ailleurs que, « *rapportés à une base* », les applications linéaires

(rp. bilinéaires, p-linéaires) sont des polynômes multivariables (en n variables) homogènes de degré 1 (rp. degré 2, rp. degré p).

Théorème de Schwarz [1] **:**
Si f est de classe C^2 sur U, pour toutes variables x_i, x_j, et tout $M \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)$$

Remarques

- Le théorème de Schwarz peut être utile dans la pratique, ***l'ordre de dérivation*** pouvant être choisi, l'un peut être ***plus facile à calculer*** que l'autre.
- Dans la pratique, toutes les fonctions sont C^2. Néanmoins, ***à titre informatif***, je vous donne un exemple à 2 variables (x,y) où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$ (donc la fonction ne sera pas C^2 sur $U \supset \{A\}$). C'est réservé aux élèves « *ambitieux* » car assez difficile à comprendre.

Contre-Exemple : Considérons $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ et montrons $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right](0,0)$, il faut au préalable calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.
Il n'y a aucun problème pour calculer la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, ***pour*** $x \neq 0$, (car sinon $x^2+y^2=0$!) :

$$\begin{aligned}
\forall\, x \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right](x,0) \\
&= \frac{(x^2+y^2)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^3y-xy^3)\ -(x^3y-xy^3)\,\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big(x,0\Big) \\
&= \frac{x^2 \times x^3 - 0 \times 0}{(x^2+0^2)^2} = \frac{x^5}{x^4} = x
\end{aligned}$$

Pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, il faut revenir à la définition et considérer la dérivée de $\varphi(y) = f(0,y)$ en 0 :

$$\varphi(y) = f(0,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x}$$

Commme il n'y a ***aucun « problème de dérivation »*** pour cette fonction, on a immédiatement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[x\Big](0,0) = \mathbf{1}$$

Après avoir remarqué que $f(x,y) = -f(y,x)$, par ***symétrie de calcul***, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \mathbf{-1}\ \neq\ \mathbf{1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

1. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921). Elève de Weierstrass. Analyse fonctionnelle.

Hessienne en un Point : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec U ouvert. On appelle ***Hessienne*** de f en $A \in U$ et on note $H_f(A)$ la matrice ***symétrique*** de coefficients $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$, pour $1 \leq i, j \leq n$.

Développement Limité à l'Ordre 2 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec U ouvert et $A \in U$. Alors f possède en A un développement limité d'orde 2 qui est :

$$f(A+H) = f(A) + df(A).H + \frac{1}{2} H^{\mathrm{T}}\, H_f(A) H + o\left(\|H\|^2\right)$$

Remarques

- On peut aussi l'écrire avec des produits scalaires $f(A+H) = f(A) + \left(\overrightarrow{\nabla} f(A) \,|\, H\right) + \frac{1}{2}\left(H_f(A)H \,|\, H\right) + o\left(\|H\|^2\right)$
- Pour $n = 2$, cela donne

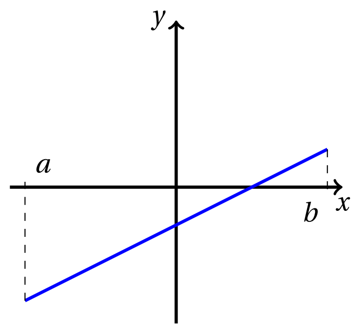
$$f(a+h, b+k) = f(a,b) \; + \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(A) + k\frac{\partial f}{\partial y}(A)}_{\text{termes d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)}_{\text{termes d'ordre 2}} + o\left(h^2 + k^2\right)$$

3 Extrema d'une fonction multi-variables

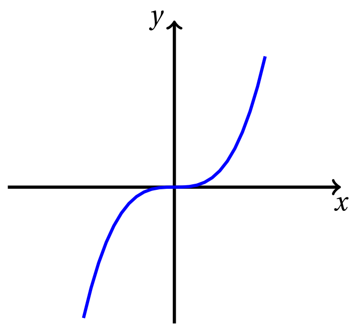
3.1 Rappels fonction d'une variable

On considère une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle qu'on suppose dérivable et même plus si besoin est sur I.

Théorème : ***Condition nécessaire :*** Si a est un extremum et a ***à l'intérieur*** de I, alors $f'(a) = 0$.



EXTREMA **MAIS** SANS DÉRIVÉE NULLE



POINT 0 À DÉRIVÉE NULLE **MAIS** NON EXTREMUM

Théorème : ***Condition suffisante :*** Soit a à ***à l'intérieur*** de I tel que $f'(a) = 0$, alors c'est un extremum ssi l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- La dérivée ***change de signe*** autour de a.
- La première dérivée non nulle en a, cad $f^{(k)}(a) \neq 0$ est ***paire***, cad k pair.
  $f^{(k)}(a) > 0$ donne alors un minimum et $f^{(k)}(a) < 0$ donne un maximum.

Remarques

- Si la première dérivée non nulle correspond à un k impair ou si la dérivée ne change pas de signe autour de a, c'est un ***point d'inflexion*** (voir dessin au-dessus).
- Si a est une racine multiple d'un polynôme (multiplicité $m \geq 2$ car alors $f(a) = f'(a) = 0$) alors c'est un extremum ssi la multiplicité est paire ; si elle est impaire, c'est un point d'inflexion.
- En fait, a est un extremum local (rp. global) ssi $f(x) - f(a)$ est de ***signe constant*** dans un voisinage de a (rp. partout). Il peut être plus simple d'effectuer un dl en a pour étudier ce signe que de calculer les dérivées k-ièmes.
- Le cas le plus « *fréquent* » : $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$ (a à l'intérieur) : conditions ***suffisantes***. Ceci explique d'ailleurs pourquoi « *statistiquement* » quand on a une dérivée nulle, on a de grandes « *chances* » d'avoir un extremum : la probabilité d'avoir $f''(a) \neq 0$ est beaucoup plus forte que celle d'avoir $f''(a) = 0$.
- Un extremum d'une fonction $f(x)$ peut se « *visualiser* » en traçant la courbe d'équation $y = f(x)$.
- Toutes ces remarques / théorèmes vont « *plus ou moins* » se généraliser en passant à l'étude des extrema des fonctions multivariables.

3.2 Généralités

Dans toute la suite on considère une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le réel $f(x_1, \ldots, x_n)$. On a n entier avec $n \geq 2$. On ne le redira pas toujours ***explicitement***. Les hypothèses varieront sur U et sur f. Dans la pratique $n = 2$ ou un peu plus rarement, $n = 3$.

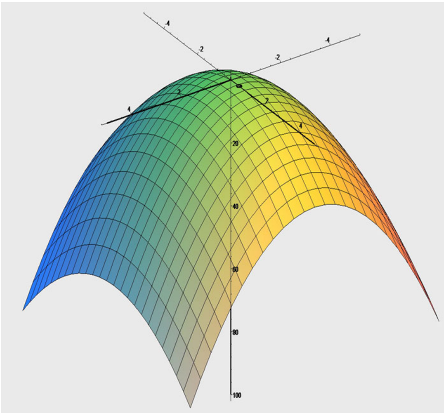
Définition : Soit A un point de U :

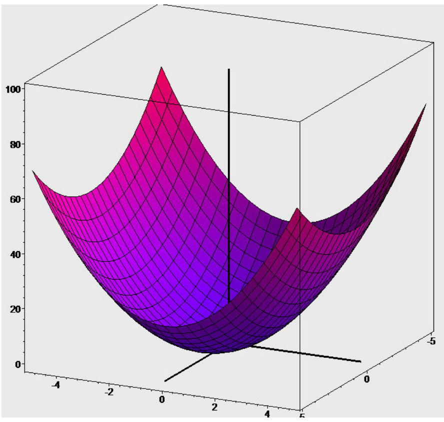
- A est un ***maximum local*** de f s'il existe une boule B centrée en A telle que :
$$\forall M \in B,\ f(M) \leq f(A) \iff f(M) - f(A) \leq 0$$
- A est un ***minimum local*** de f s'il existe une boule B centrée en A telle que :
$$\forall M \in B,\ f(M) \geq f(A) \iff f(M) - f(A) \geq 0$$
- A est un ***maximum global*** de f ssi ***pour tout*** M, $f(M) \leq f(A) \iff f(M) - f(A) \leq 0$
- A est un ***minimum global*** de f ssi ***pour tout*** M, $f(M) \geq f(A) \iff f(M) - f(A) \geq 0$
- A est un ***extremum local*** (rp. ***global***) de f ssi c'est un minimum ***ou*** maximum local (rp. global).

Remarques

- On retient que ***« l'étude »*** est le signe de $f(M) - f(A)$ qui doit être ***constant*** au moins ***localement***.
- On prêtera attention qu'il y a des conditions ***nécessaires*** ou des conditions ***suffisantes*** d'extrema[2]
- A l'instar d'une fonction d'une variable $x \to f(x)$ où les extrema peuvent être visualisés sur la ***courbe*** $y = f(x)$, les extrema d'une fonction à deux variables $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ peuvent être visualisés sur la ***surface*** $z = f(x, y)$. Par contre, vu la complexité, il faut en général utiliser un logiciel pour le tracé.

Exemple 1 (Paraboloïde de Révolution) : :
Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$. Etude graphique sur $\mathbb{R}^2$ par la surface $z = f(x, y)$ à l'aide de MapleV™





Commentaires : : Sur le premier graphique (axe z à l'envers), on voit bien le ***minimum global*** près de $(0,0)$, on peut deviner $(\frac{1}{2}, 0)$. Quant aux 4 « *maxima* » : regardons le 2e graphique. Déjà on a coloré en fonction de l'« *altitude* » ce qui permet mieux de visualiser les maxima et minima et ensuite, on a « *boité* » les axes. En fait, un graphique est nécessairement « *coupé* »! En regardant les de plus près, on voit qu'on s'est restreint à $(x, y) \in \left[-5, 5\right]^2$, et pas sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, ***si on se place*** sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, ce ne sont pas des « *vrais* » maxima, tout « *monte* » à l'infini si on ne « *coupe* » pas....

3.3 Théorèmes

Point Critique : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec U ouvert. $A \in U$ est dit ***point critique*** de f ssi toutes les dérivées partielles en A sont nulles (ce qui équivaut à $df(A) = 0$ ou $\overrightarrow{\nabla} f(A) = 0$)

Condition nécessaire d'Extrema : Soit f de classe C^1 définie sur un ***ouvert*** U, et A un extremum local ou global de f. Alors A est un ***point critique***.

2. le pluriel d'extremum est extrema en raison de son origine latine, mais l'« *usage* » autorise extremums.

Démo : Si f est C^1 sur l'ouvert U et $A \in U$, on utilise le dl d'ordre 1 en A de f : $f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) + o(\|H\|)$ Comme, par linéarité, $H = (h_1,\ldots,h_n) \to \sum_{k=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ prend des valeurs >0 et <0, il est nécessaire que tous les coefficients $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ soient nuls.

Remarques

- On retrouve une « *analogie* » avec une fonction d'une variable, où une condition ***nécessaire*** d'extrema est $f'(a) = 0$.
- Attention ! à bien se placer sur un ***ouvert*** ou à ***l'intérieur*** d'une partie. Si le point A est sur la ***frontière*** d'une partie de $\mathbb{R}^n$, la ***condition de nullité*** des dérivés partielles n'est plus nécessaire.
- Prêter attention au fait que cette ***condition de nullité***, comme pour une variable, n'est ***pas suffisante.***.

Condition Suffisante d'Extrema :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec U ***ouvert*** et $A \in U$ un ***point critique***. Alors

- Si $H_f(A) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A ***symétrique définie positive***, A est un ***minimum*** strict (au moins) local.
- Si $-H_f(A) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A ***symétrique définie négative***, A est un ***maximum*** strict (au moins) local.
- Si $H_f(A)$ n'est ni positive, ni négative, cad possède des vp >0 et <0, A n'est pas ***un*** extremum local.

Remarques

- Il y a des cas où on ne peut pas conclure avec la hessienne, par exemple s'il y a des valeurs propres positives ou (et) nulles. Il faut alors étudier le signe (localement) de $f(M) - f(A)$. Voir exemples.
- Rappelons le cours $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi les vp sont ***strictement positives*** ssi pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \neq 0$, $X^{\mathrm{T}} SX > 0$.
- Pour $n = 2$, $S \in S_2^{++}$ équivaut à $\operatorname{tr}(S) > 0$ et $\det(S) > 0$. Utile pour aller un peu plus vite. De même $-S \in S_2^{++}$ (matrice symétrique définie négative cad les 2 vp sont <0) équivaut à $\operatorname{tr}(S) < 0$ et $\det(S) > 0$. Le dernier cas du théorème est $\det(S) < 0$. Pour terminer, le cas du théorème où l'on ne peut pas conclure immédiatement est $\det(S) = 0$

Exemple 1 (Paraboloïde de Révolution) :
Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 - x$. Etude des extrema locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ est un ***ouvert. Ouf!*** Les points critiques sont solutions de :

$$\overrightarrow{\nabla} f(M) = \overrightarrow{0} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1}{2} \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Un seul ***extremum possible*** : $A : \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
Reste à voir s'il l'est ou pas, s'il est minimum ou maximum, global ou local. On calcule la Hessienne :

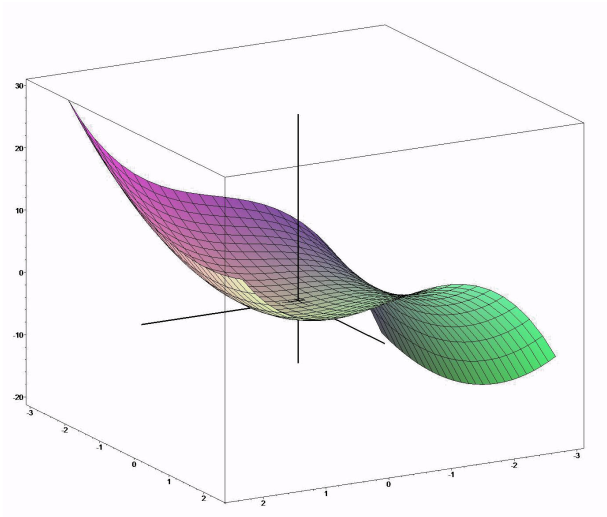
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

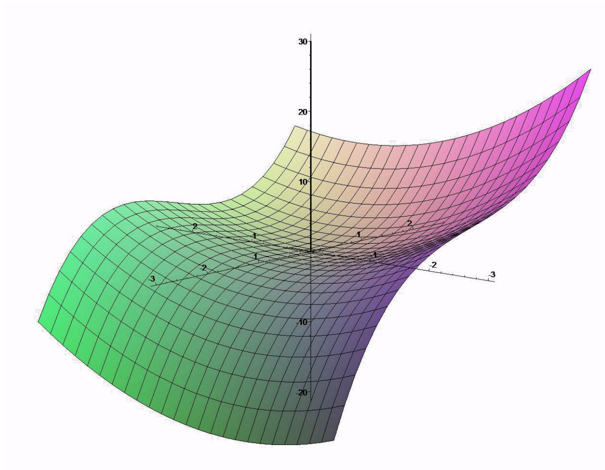
On remarque que la Hessienne est la même en tout point A de $\mathbb{R}^2$. Ici, la matrice est diagonale, les 2 valeurs propres sont 2, donc strictement positives, soit $H_f(A) \in S_2^{++}$. A est un ***minimum***.
Pour savoir si le minimum est local ou global, on étudie le signe de $f(M) - f(A)$. On sait déjà qu'il est localement ≥ 0. L'est-il globalement, cad sur ***tout*** $\mathbb{R}^2$?

$$f(M) - f(A) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq 0 \qquad \textbf{pour tout } M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

C'est donc un ***minimum global***. On l'avait deviné sur le dessin, il suffisait de s'arranger dans le calcul.

Exemple 2 :
Etude des ***extrema*** de la fonction $f : (x,y) \longrightarrow x^2 - xy + y^2 + x^3$ sur $\mathbb{R}^2$. Précisez si les extrema sont globaux.





$\mathbb{R}^2$ étant ***ouvert***, les extrema ***éventuels*** sont des ***points critiques*** :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2x - y + 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & -x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + 12y^2 & = & 0 \\ x & = & 2y \end{cases} \iff M = \left(0,0\right) \textbf{ ou } M = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

On calcul la Hessienne en tout $M(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad H_f(M) = \begin{pmatrix} 2+6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etude au point critique $O = (0,0)$
On a $\operatorname{tr}\left(H_f(O)\right) = 4 > 0$ et $\det\left(H_f(O)\right) = 3 > 0$, donc $H_f(O) \in S_2^{++}$, soit O ***minimum*** (au moins) local (les 2 vp sont 3 et 1)

Etude au point critique $A = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
On a $\operatorname{tr}\left(H_f(A)\right) = 1 > 0$ et $\det\left(H_f(A)\right) = -3 < 0$. Il y a donc une vp > 0 et une vp < 0. A ***n'est pas*** un extremum.

Reste à voir si O est un minimum global. Le graphique montre que non. La valeur de f en O est $f(O) = 0$. Pour établir que ce minimum n'est pas global, il faut et il suffit de trouver un point M tel que $f(M) < 0$.
On peut aussi remarquer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x^3 = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$ établit qu'il n'y a pas de maximum global, mais cela on le savait déjà... Pourquoi ?

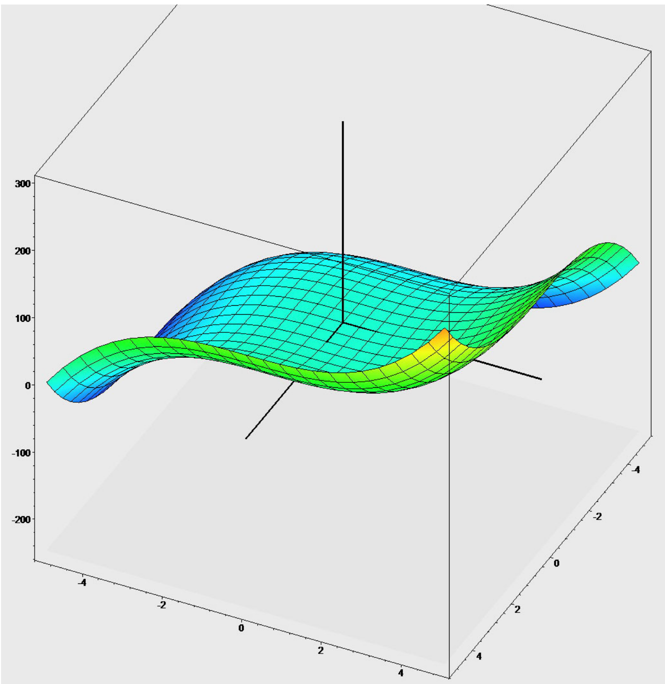
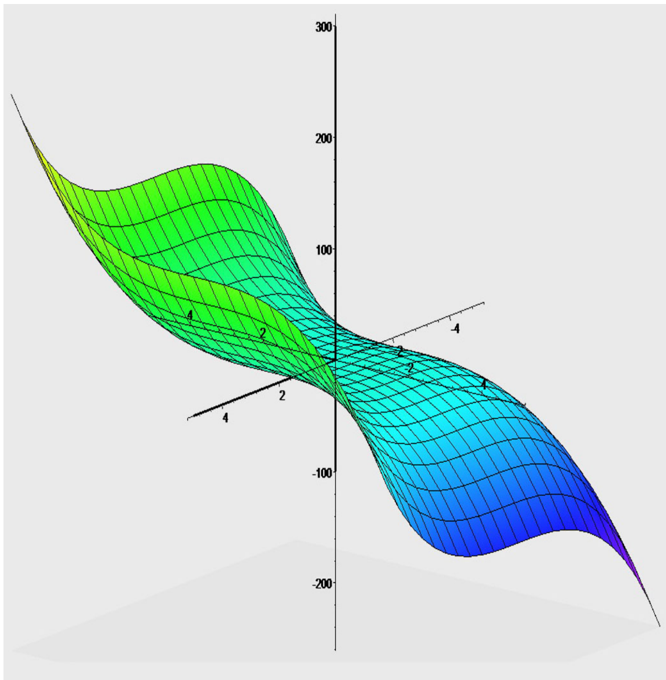
Théorème : Si f est définie et ***continue*** sur F qui est un ***fermé borné*** (on dit ***compact***), alors f admet sur F un ***maximum global*** et un ***minimum global***

Remarques

- ***Attention!*** donc à bien regarder les propriétés ***topologiques*** de la partie U où vous cherchez vos extrema. Lisez bien l'énoncé! Vaut mieux que ce soit un ***ouvert*** (remarque : ce n'est pas « *incompatible* » avec fermé, mais très rarement « *compatible* » avec fermé borné).

- Sur un fermé borné (par exemple un carré fermé $\left[\, a, b \,\right]^2$ ou une boule fermée $\overline{B}(A, r)$), vous n'avez pas de conditions nécessaires pour trouver les extrema (cad les seuls possibles). En général, on se place d'abord sur l'***ouvert*** le plus grand contenu dans ce fermé, par exemple sur le carré ouvert intérieur $\left]\, a, b \,\right[^2$ ou la boule ouverte $B(A, r)$. Il restera à étudier la ***frontière*** ce qui est plus délicat, car les extrema ***« n'annulent » pas nécessairement***les dérivées premières partielles. Les élèves ambitieux doivent essayer de comprendre ce problème exposé ici :

Exemple 2 :
Etude des ***extrema*** de la fonction $f(x, y) \longrightarrow x^3 + y^3$ sur $P = \left[\, -5, 5 \,\right]^2$. Précisez si les extrema sont globaux.

P n'est ***pas un ouvert*** mais un ***fermé borné***, cad un compact.

Etude sur l'ouvert intérieur $\mathring{P}$:

Sur l'***ouvert*** $\mathring{P} = \left]\, -5, 5 \,\right[^2$, qui est l'intérieur de P, les extrema sont ***des*** points critiques.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 3x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & 3y^2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

La Hessienne en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (je ne mets pas les détails). On ne peut pas conclure avec le théorème du cours.

Il faut alors considérer le ***signe de*** $f(M) - f(0, 0) = x^3 - y^3$, « *voir* » s'il est ≥ 0 ou ≤ 0 (au moins) localement. On voit bien que non, on le prouve proprement avec deux suites :

$$M_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \; : \; f(M_n) - f(O) = \frac{1}{n^3} \geq 0 \qquad P_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right) \; : \; f(P_n) - f(O) = -\frac{1}{n^3} \leq 0$$

f est ***continue*** et P compact, il y a ***donc*** un maximum global et un minimum global, ***donc***, d'après l'étude précédente (on ne les a pas trouvés), ils sont sur la frontière (les 4 segments du carré P).

Etude de la frontière de P :

Les 4 fonctions à étudier sont :

$$\varphi_1 : x \to f(x,-5) = x^3 - 125 \quad \text{pour } -5 \leq x \leq 5 \qquad \varphi_2 : x \to f(x,5) = x^3 + 125 \quad \text{pour } -5 \leq x \leq 5$$
$$\psi_1 : x \to f(-5,y) = -125 + y^3 \quad \text{pour } -5 \leq y \leq 5 \qquad \psi_2 : y \to f(5,y) = 125 + y^3 \quad \text{pour } -5 \leq y \leq 5$$

Pour l'efficacité et gagner du temps, on peut remarquer les « *symétries* » de la fonction f liées à la surface (une sorte de « *parité* » généralisée aux fonctions multi-variables) :

$$f(-x,-y) = -f(x,y) = f\big(S_O(x,y)\big) \qquad f(y,x) = f(x,y) = f\big(S_\Delta(x,y)\big)$$

S_0 est la symétrie par rapport à O : $(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$ et $S_\Delta : (x,y) \longrightarrow (y,x)$ est la symétrie par rapport à la première bissectrice. On a donc, par composition, aussi la symétrie par rapport à l'orthogonal de la première bissectrice : $(x,y) \longrightarrow (-y,-x)$. Il suffit donc d'étudier φ_1 (l'étude des 3 autres se déduira par les 3 symétries, je vous liasse y réfléchir).

φ_1 est une fonction réelle à 1 variable, on va donc très vite dans son étude. $\varphi_1'(x) = 3x^2$. On trouve 3 valeurs de x extrema **sur** $\big[-5,5\big]$ qui sont $-5, 5$ et 0 et correspondent aux 3 points $(-5,-5)$, $(5,-5)$, $(0,-5)$. Ce dernier correspond à un point d'inflexion ($\varphi_1''(0) = 0$), regardez le graphique. Donc, avec les 3 symétries, 4 extrema possibles $(-5,-5)$ $(-5,5)$ $(5,-5)$ $(-5,-5)$ (on retrouve les mêmes).
Leur « *altitude* » est $f(-5,-5) = -250$ et $f(5,-5) = f(-5,5) = 0$ et $f(5,5) = 250$.
Donc, comme ce sont les seuls extrema possibles, ***nécessairement*** $(5,5)$ est ***maximum global*** et $(-5,-5)$ ***minimum global***.

Reste à voir si les 2 derniers points $(-5,5)$ et $(5,-5)$ peuvent être des extrema locaux. Par « *symétrie* » par rapport à 0, il suffit d'étudier $B(5,-5)$. Le point $(-5,5)$ aura les mêmes propriétés. ***Attention !*** à bien comprendre que ***ici***, il faut prendre h, k voisins de 0 avec $h \leq 0$ et $k \geq 0$ pour étudier le signe!, car c'est le « *coin* » inférieur droit. On étudie donc le signe de $f(B+H) - f(B)$ localement avec ces restrictions sur h et k :

$$f(B+H) - f(B) = f(5+h,-5+k) - f(5,-5) = (5+h)^3 + (k-5)^3 = \underbrace{h^3+k^3}_{\text{termes d'ordre 3}} + \underbrace{5h^2-5k^2}_{\text{termes d'ordre 2}} + \underbrace{25h+25k}_{\text{termes d'ordre 1}}$$

Il faut comprendre que le terme d'ordre 1 donne le signe, ce qui permet de deviner que ce n'est pas un extremum (la graphique le laissait supposer). On construit donc 2 suites de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers le point B et donnant un signe différent :

$$M_n = \Big(5,-5\Big) + \Big(\frac{1}{n},0\Big) \quad f(M_n) - f(B) \sim 25\frac{1}{n} > 0 \qquad U_n = \Big(5,-5\Big) + \Big(-\frac{1}{n},0\Big) \quad f(U_n) - f(B) \sim -25\frac{1}{n} < 0$$

B n'est donc pas un extremum. Ouf! C'est fini.

4 Résolution d'E.D.P. (Equations aux Dérivées Partielles)

Les EDP sont aux fonctions multi-variables ce que les équations différentielles sont à celles d'1 variable. Exemples :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{(Equation de la chaleur)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(Equation des ondes ou d'\textbf{Alembert}[3])}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(Equation de transport)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{(Equation de \textbf{Laplace}[4])}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad \text{(Equation de \textbf{Laplace}[4] en sphériques)}$$

4.1 Premiers exemples immédiats sans calcul

Proposition : Soit f définie et C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$ ***ouvert convexe***, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y) = g(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y) = h(x)$$

On suppose ici les fonctions définies et C^1 sur un ***ouvert convexe***. Il faut essayer de comprendre le mécanisme « *d'intégration* » selon x ou y. Les fonction φ_i sont des fonctions ***quelconques*** (un peu comme les constantes pour les fonctions d'une variable réelle lorsqu'on cherche les primitives).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \Longleftrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi_1(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \Longleftrightarrow f(x,y) = xy + \varphi_2(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y) \Longleftrightarrow f(x,y) = xg(y) + \varphi_3(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x) \Longleftrightarrow f(x,y) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t + \varphi_4(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,e^x \Longleftrightarrow f(x,y) = ye^x + \varphi_5(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\,e^x \Longleftrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}y^2e^x + \varphi_6(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) \Longleftrightarrow f(x,y) = \varphi_7(y)\,e^x$$

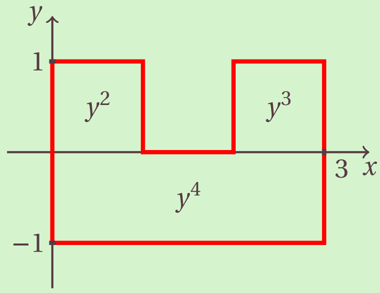
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\,f(x,y) \Longleftrightarrow f(x,y) = \varphi_8(y)\,e^{x^2/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,f(x,y) \Longleftrightarrow f(x,y) = \varphi_9(x)\,e^{xy}$$

3. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).
4. **Pierre-Simon Laplace** : mathématicien, physicine et astronome français (1749-1827). Surnommé le « *Newton français* », il fut ministre sous Napoléon 1er. Travaux en théorie des équations différentielles et probabilités.

Contre-exemple sur un ouvert non convexe :

On définit f sur $U \subset \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{sur }]0,1[\times[0,1[\\ y^4 & \text{sur }]0,3[\times]-1,0[\\ y^3 & \text{sur }]2,3[\times[0,1[\end{cases}$



Le lecteur constatera que ***on n'a pas*** $f(x,y)$ est ***une*** fonction de y (mais plutôt une fonction de y qui « *dépend* » de x dans le sens où elle dépend de la position du point $M(x,y)$.
Et pourtant, on a bien $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = 0$, pour tout $M \in U$. Je ne mets pas les détails notamment pour les 2 segments de droites où on pourrait douter de l'existence de la dérivée partielle par rapport à x, je vous laisse y réfléchir.

Quelques autres exemples avec des dérivées partielles secondes. Les équivaut sont sur un ***ouvert convexe***. Je vous laisse comprendre les 2 étapes successives.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi_1(y) \qquad f(x,y) = x\,\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi_3(y) \qquad f(x,y) = \varphi_4(y) + \varphi_5(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi_6(y) \qquad f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 + x\,\varphi_6(y) + \varphi_7(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi_8(y) \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y + \varphi_9(y) + \varphi_{10}(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f(x,y) \qquad . \qquad f(x,y) = \cosh(x)\,\varphi_{11}(y) + \sinh(x)\,\varphi_{12}(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \qquad . \qquad f(x,y) = \cosh(y)\,\varphi_{13}(x) + \sinh(y)\,\varphi_{14}(x)$$

La 5ᵉ équation se « *comprend* » en se rappelant que $y'' = y$ se résoud en $y = a\cosh x + b\sinh x$.

4.2 Dérivées partielles premières inverses en polaires

Les coordonnées polaires sont ***définies par*** les couples (ρ,θ) vérifiant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ ou, en complexes, $z = \rho e^{i\theta}$. ***Mais Attention !*** ρ n'a aucune raison d'être ≥ 0 : on a $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ ou même $\rho^2 = x^2+y^2$ ***mais on n'a pas nécessairement*** $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.
En fait, le « *gros problème* » est qu'il ***n'y a pas unicité***, pas tellement à cause du « *à* 2π *près* »; mais à cause du fait que si (ρ,θ) convient, $(-\rho,\theta+\pi)$ ***convient aussi***. Par ***commodité***, on prend souvent $\rho > 0$, mais ce n'est pas une ***obligation***. Cette ***non unicité*** amène au moins 2 problèmes sous-jacents : des erreurs de raisonnement sur les polaires. Un exemple simple : pour chercher ***l'intersection*** d'une courbes en polaires $\rho = f(\theta)$ et du cercle centré en O et de rayon 2, on résoud « *instinctivement* » $2 = f(\theta)$. C'est une ***erreur de raisonnement***, il faut ***aussi*** résoudre $-2 = f(\theta+\pi)$. L'autre problème est qu'il est « *délicat* » d' ***exprimer*** ρ et θ en fonction de x et y. Pour ρ je l'ai expliqué plus haut. Quant à θ c'est assez ingérable. De la définition, si $x \neq 0$, on peut en déduire $\tan\theta = \frac{y}{x}$ et

donc, sur ***le demi-plan*** $x>0$, $\theta=\arctan\frac{y}{x}$ et sur l'autre demi-plan $x<0$, on a $\theta=\arctan\frac{y}{x}+\pi$. Reste $x=0\ldots$.
On a une autre formule, que je ne démontre pas ici, pour $y\neq 0$, $\theta=2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Revenons à ce qui nous intéresse : un problème va se poser : comment dériver partiellement les polaires ρ,θ en fonction de x,y, puisque on ne peut pas les exprimer clairement, notamment le θ ?? Là, je vous communique l'astuce assez simple : vous exprimez la ***matrice jacobienne des polaires*** et vous ***inversez la matrice***. Vous n'avez d'ailleurs pas besoin d'apprendre ce terme de jacobienne, juste la technique. On cherche donc à calculer : $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ $\frac{\partial\rho}{\partial y}$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ $\frac{\partial\theta}{\partial y}$

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}\implies J^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \frac{-\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial x} & \frac{\partial\rho}{\partial y}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Je rappelle que l'inverse de la matrice 2×2 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est la matrice $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

Remarque : Ceci est la généralisation du théorème pour une variable $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{1}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}}$, en rappelant que mathématiquement cela vient de $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$. Allez réviser votre cours de Sup.

4.3 Exemple de Résolution d'équation aux dérivées partielles premières par « passage en polaires »

Exemple 1 : :
Résoudre sur l'ouvert $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x>0\right\}$, $\quad x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad (E)$ en ***passant en polaires***.

$U=\left]0,+\infty\right[\times\left]-\infty,+\infty\right[$ est bien un ***ouvert*** de $\mathbb{R}^2$ comme ***produit d'intervalles ouverts***. On considère la composition de fonctions suivante, « ***passage en polaires*** » :

$$\begin{array}{ccccc}
V=\left]0,+\infty\right[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
(r,\theta) & \xrightarrow{\varphi} & \begin{cases}x & = & r\cos\theta\\ y & = & r\sin\theta\end{cases} & \xrightarrow{f} & f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)
\end{array}$$
$$f^*=f\circ\varphi$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial f^*}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\\
\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial f^*}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

Résoudre l'EDP (E) sur U ***équivaut*** (HP : $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V) à résoudre sur $V=\left]0,+\infty\right[\times\left]-\pi/2,\pi/2\right[$ l'EDP

$$r\cos\theta\left(\sin\theta\frac{\partial f^*}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\right)-r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial f^*}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\right)=0=\frac{\partial f^*}{\partial\theta}$$

Cette équation se résoud en $f^*(r,\theta)=g(r)$ ou encore $\boxed{f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ (car $r>0$ sur V).

4.4 Exemple de Résolution d'équation aux dérivées partielles secondes

Exemple 2 (Equation aux ondes) : :
Résoudre ***sur l'ouvert*** $\mathbb{R}^2$, $\quad (E)\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$
en utilisant le ***changement de variables*** $u = x + cy \quad v = x - cy$

On construit le diagramme de composée suivant (On notera qu'il est « à l'envers » du précédent) : on a $f^*(u,v) = f^*(x+cy, x-cy) = f(x,y)$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(x,y) & \xrightarrow{\varphi} & \left\{\begin{array}{lcl} u & = & x+cy \\ v & = & x-cy \end{array}\right. & \xrightarrow{f^*} & f^*(u,v) = f(x,y)
\end{array}$$

$$f^* \circ \varphi = f$$

On calcule les dérivées partielles par la formule de composition, mais il faudra ici, le faire 2 fois :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f^*}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = c\frac{\partial f^*}{\partial u} - c\frac{\partial f^*}{\partial v}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial f^*}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v}\right) \times 1 + \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}\right) \times 1 = \boxed{\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[c\frac{\partial f^*}{\partial u} - c\frac{\partial f^*}{\partial v}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left[c\frac{\partial f^*}{\partial u} - c\frac{\partial f^*}{\partial v}\right]\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial v}\left[c\frac{\partial f^*}{\partial u} - c\frac{\partial f^*}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= \left(c\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} - c\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v}\right) \times c - \left(c\frac{\partial^2 f^*}{\partial v \partial u} - c\frac{\partial^2 f^*}{\partial^2 v}\right) \times c = \boxed{c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}}$$

Résoudre l'EDP (E) sur $\mathbb{R}^2$ équivaut donc à résoudre sur $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ l'EDP (HP : φ est unC^2-difféomorphisme) :

$$\left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}\right) = 0 = 4\frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f^*}{\partial v}\right]$$

qui se résoud en deux étapes,d'abord $\dfrac{\partial f^*}{\partial v} = g(v)$, puis $f^*(u,v) = G(v) + H(u)$ (G, H fonctions quelconques, C^2 sur $\mathbb{R}$), soit finalement $\boxed{f(x,y) = G(x-cy) + H(x+cy)}$.