Algèbre Bilinéaire

1 Matrices Orthogonales

- $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ($M \in O_n(\mathbb{R})$) ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée

  $\Longleftrightarrow$ $(C_1, \ldots, C_n)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ ***muni de sa structure euclidienne canonique***.
  $\Longleftrightarrow$ M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$
  $\Longleftrightarrow$ $M\ {}^tM = {}^tM M = I_n$
  $\Longleftrightarrow$ $(L_1, \ldots, L_n)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.
  $\Longleftrightarrow$ M représente un endomorphisme (automorphisme !) orthogonal dans une BON.

- Toute matrice orthogonale M vérifie $\det M = \pm 1$ et les seules valeurs propres possibles sont ± 1
  démo: On écrit $\det({}^tM M) = (\det M)^2 = \det I_n = 1$ et $\|X\|^2 = {}^tX X = {}^tX\, {}^tM M X = {}^t(MX) MX = \|MX\|^2 = \lambda^2 \|X\|^2$.

- $\left(O(n), \times\right)$ est un sous-groupe de $\left(Gl(n), \times\right)$ appelé **Groupe Orthogonal de** E

- Le sous-ensemble de $O_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 est un sous-groupe de $O(n)$, noté $SO(n)$ et appelé groupe spécial orthogonal. Ses matrices sont appelées matrices orthogonales directes (ou droites) ou encore matrices de rotations.

- Toute matrice de passage d'une BON à une BON (rp. d'une BOND à une BOND) est orthogonale (rp orthogonale directe).

- **Formule de Changement de Base Orthonormale :**
  $\forall \mathscr{E}, \mathscr{F}$ BON de E $\quad \forall f \in L(E), \quad \text{Mat}(f, \mathscr{F}) = {}^tP\ \text{Mat}(f, \mathscr{E})\ P$ avec $P = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{F}}$

- Pour n=2, les matrices de $O(2)$ sont $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et celles de $SO(2)$ sont $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2 Projections et Symétries orthogonales

Dans toute la suite $\left(E, (|)\right)$ désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

- Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle projection orthogonale sur F (on la note en général p_F) la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. on sait $F \oplus F^\perp = E$, $\text{Im}\, p = F$, $\text{Ker}\, p = F^\perp$

- $\forall x \in E, \quad x - p(x) \in F^\perp$. On a même $Id - p_F = p_{F^\perp}$.

- **Caractérisation du projeté :** $p_F(x) = y \iff y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

- Soit p une **projection** de E (cad linéaire tq $p \circ p = p$). Elle est (**en plus)** orthogonale ssi

  $\Longleftrightarrow$ Le "\\" est orthogonal au "sur", c'est-à-dire $\text{Ker}\, p \perp \text{Im}\, p$ $\left(= \text{Ker}(Id - p)\right)$ $\iff$ $\text{Ker}\, p = (\text{Im}\, p)^\perp$.
  $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in E, \quad p(x) \perp x - p(x)$
  $\Longleftrightarrow$ **(spé)** p est un endomorphisme symétrique (auto-adjoint), cad $p^* = p$, ou encore

$$\forall x, y \in E, \quad (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$$

- **Formules du projeté**
  Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une BON de F, $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(e_i \,|\, x\right) e_i$
  démo: $y = \sum\limits_{i=1}^{p} \left(e_i \,|\, x\right) e_i \in F$ est évident et $(e_j|x-y) = (e_j|x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{p} (e_i|x)\,(e_j|e_i)\right) = (e_j|x) - (e_j|x) = 0$ soit $x - y \in F^{\perp}$
  Si D est une droite dirigée par a, $p_D(x) = (a|x)\ \dfrac{a}{\|a\|^2}$.
  Si H est un hyperplan dont un vecteur normal non nul est ω (cad $H^{\perp} = <\omega>$), alors $p_H(x) = x - (\omega|x)\ \dfrac{\omega}{\|\omega\|^2}$
- Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F (on la note en général s_F) la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.
  On appelle ***réflexion***, une symétrie orthogonale par rapport à un ***hyperplan***
- On a $s_F = 2p_F - Id_E$, e qui permet d'utiliser les formules plus haut (en les adaptant légèrement. . .).
- **Caractérisation du symétrisé :** $s_F(x) = y \iff x + y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$.
- Une symétrie est orthogonale ssi elle conserve la norme, (cad ssi $s \in O(E)$)
- **(spé)** $\det s_F = (-1)^{n-\dim F} = (-1)^{\operatorname{codim} F}$. Donc, si s est **déjà** une symétrie
  $s_F \in SO(E) \iff$ la symétrie s est une rotation $\iff n - \dim F = \operatorname{codim} F$ est paire

---

3 Endomorphismes (ou Automorphismes) Orthogonaux

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dimension finie n.

- Soit f un endomorphisme de E. f est appelé endomorphisme orthogonal, ou automorphisme orthogonal, ou isométrie vectorielle (on écrit $f \in O(E)$) ssi l'une des propriétés suivantes est vérifiée.
  - $\iff$ f conserve la norme (euclidienne), cad $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$
  - $\iff$ f conserve le produit scalaire $\forall x, y \in E \quad (f(x)|f(y)) = (x|y)$
  - $\iff$ f conserve la distance (euclidienne) $\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$
  - $\iff$ **Il existe une** base $\mathscr{E}$ orthonormée telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{E})$ soit orthogonale.
  - $\iff$ **Pour toute** base $\mathscr{E}$ orthonormée, $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{E})$ est orthogonale.
  - $\iff$ L'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée.
  - $\iff$ **(spé)** L'endomorphisme adjoint f^* de f vérifie $f^* = f^{-1}$.
- $\left(O(E), \circ\right)$ est un groupe, sous-groupe de $\left(GL(E), \circ\right)$, d'ailleurs lui-même sous-groupe de $\left(Bijection(E), \circ\right)$.
- $\det f = \pm 1$ et les seules valeurs propres possibles de f sont ± 1.
- Le sous-ensemble de $O(E)$ des automorphismes orthogonaux de déterminant 1 est un sous-groupe de $O(E)$, noté $SO(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal. Ses éléments sont appelés endomorphismes orthogonaux directs (ou droits) ou rotations ou isométries vectorielles directes.