

TABLE DES MATIÈRES

I – Réduction : Diagonalisabilité / Eléments propres à étudier	3
1 - CCP PSI 2023-2019-2017 ENSSAT 2010 (matrice complexe $n \times n$)	3
2 - IMT PSI 2023 (calcul de A^n)	4
3 - CCINP PSI 2023-2022 (Suite récurrente et trigonalisation par blocs)	6
4 - Mines-Ponts PSI 2023-2022 (équation fonctionnelle aux valeurs propres)	8
6 - IMT PSI 2023 (diagonalisabilité matrice 5×5)	9
12 - CCINP PSI 2023 (diagonalisabilité matrice par blocs annulateur)	11
16 - Centrale PSI 2023 (endomorphisme de polynômes)	12
21 - IMT PSI 2023 (diagonalisabilité endomorphisme matrices)	13
II – Réduction : Autres	15
24 - Mines-Ponts PSI 2023 (polynôme annulateur)	15
27 - Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle)	16
28 - CCINP PSI 2023 (polynôme annulateur)	16
31 - CCINP PSI 2023-2021 (matrices sans valeur propre commune)	17
38 - CCINP PSI 2023-2022-2021 (endomorphisme de matrices)	18
39 - Mines-Ponts PSI 2023 (commutants)	19
45 - Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales)	20
46 - CCINP PSI 2023 (autour de f et f^2 diagonalisables)	21
III Algèbre Linéaire	23
48 - Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle)	23
53 - Mines-Ponts PSI 2023 (étude de 2 sevs de $\mathcal{L}(E, F)$)	24
54 - CCINP 2023 Mines-Ponts 2013 PSI Centrale 2007 PSI TPE PSI 2006 Mines-Ponts PC 2015 (dimension d'un sev de $\mathcal{L}(E, F)$)	26
IV Algèbre Euclidienne	26
63 - CCINP PSI 2023 (caractérisation projection orthogonale)	26
65 - Centrale PSI 2023 (matrice antisymétrique 3×3)	27
71 - CCINP PSI 2023 (produit scalaire intégral)	28
74 - CCP PSI 2023-2019 (espaces orthogonaux en dimension infinie)	30
76 - CCINP PSI 2023 -2022 Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphismes de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)	31
78 - CCINP PSI 2023 Mines-Ponts PSI 2014 (produit scalaire intégral)	32
79 - IMT PSI 2023 (matrice projection orthogonale)	34
V – Séries : Convergence, Calcul de Sommes et de Rayons de Convergence	35
85 - Mines-Ponts PSI 2023 Petites Mines PSI 2013 (autour de séries alternées)	35
86 - Ensea PSI 2023 CCP PSI 2016 (calcul de somme)	37
90 - IMT PSI 2023-2022 (équivalent somme)	37
98 - IMT 2023 (nature série alternée)	38
100 - IMT PSI 2023-2019 (nature série alternée)	39
101 - Mines-Ponts PSI 2023 (Permutation série harmonique)	40
VI – Séries et Suites de Fonctions	41
102 - Mines-Ponts PSI 2023 (série entière)	41
108 - Mines-Ponts PSI 2023 (suite de fonctions polynomiales)	42
111 - CCP PSI 2023-2021-2017-2016-2011 (série à terme intégral)	44
113 - CCINP PSI 2023-2022 (série entière)	45
120 - CCINP PSI 2023 (série de fonctions)	47
124 - CCP PSI 2023 -2018 (développement en série d'une intégrale)	48

125 - CCINP PSI 2023 (série de fonctions)	49
VII Intégrales	51
128 - Mines-Ponts PSI 2023 (intégrale à paramètre de Laplace) *	51
130 - CCINP PSI 2023-2019-2018-2017-2014 (série alternée avec intégrale en gamma)	52
132 - CCINP PSI 2023-2015-2009 IMT PSI 2022 Ensam 2017 (intégrale à paramètre)	54
141 - IMT PSI 2023-2022 (calcul intégrale)	55
145 - Navale PSI 2023 BQCCP MP ->2022 Mines-Ponts PSI 2018 (étude fonction-intégrale)	56
147 - Centrale PSI 2023 (développement asymptotique suite-intégrale) *	57
148 - Mines-Ponts PSI 2023 (limite suite-intégrale à indéterminée) *	59
149 - CCINP PSI 2023 (limite suite-intégrale)	60
151 - CCINP PSI 2023 (calcul d'intégrale)	61
152 - CCINP PSI 2023 -2022 -2021 (fonction-intégrale)	62
VIII Espaces Vectoriels normés	64
155 - Mines-Ponts PSI 2023-2022 (convergence suite de polynômes) *	64
156 - X PSI 2023 (fermeture matrices trigonalisables) *	64
157 - Mines-Ponts PSI 2023 (suite de matrices) *	65
160 - CCINP PSI 2023-2021 (limite suite endomorphismes)	66
IX Analyse : Autres	67
167 - IMT PSI 2023 (équation différentielle)	67
168 - Centrale PSI 2023 (étude extrema fonction convexe) *	68
169 - CCINP PSI 2023-2021 (étude fonction de \mathbb{R}^2)	69
177 - CCINP 2023 Mines-Ponts PSI 2021 Centrale PSI 2014 (extrema sur un ouvert de \mathbb{R}^2)	71
X Probabilités	72
179 - IMT PSI 2023 (variables de Bernoulli)	72
184 - CCINP PSI 2023 (calcul de probas)	73
188 - Centrale PSI 2023 (tirage avec protocole) *	74
193 - CCINP PSI 2023-2021 (probabilité matrice 2×2 diagonalisable)	74
195 - CCINP PSI 2023 -2022 (première apparition Pile Face)	75
196 - CCINP PSI 2023 -2022 (couple de vas) *	77
198 - CCP PSI 2023 -2019-2017 (loi d'une va somme variable de vas)	77
199 - CCINP PSI 2023 -2021 (calculs sur loi de probabilité)	78

I — RÉDUCTION : DIAGONALISABILITÉ / ÉLÉMENTS PROPRES À ÉTUDIER

CCP PSI 2023-2019-2017 | ENSSAT 2010 (matrice complexe $n \times n$)

ENONCÉ 1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ [201x: $\alpha \in \mathbb{C}$] et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \alpha^{i+j-2}$.

- 1) A est-elle diagonalisable?
- 2) Donnez le rang de A . En déduire les valeurs propres. [2017 : Donnez une valeur propre de A]
- 3) [201x : A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice A est-elle diagonalisable?]

1) La matrice est symétrique car $a_{ij} = a_{ji}$ et **réelle** donc diagonalisable.

2) On écrit la matrice en remarquant que si la ligne (ou la colonne) augmente d'1, la puissance aussi :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^0 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^1 & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & \alpha^n \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \dots & \alpha^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha^{n-1} & \alpha^n & \alpha^{n+1} & \dots & \alpha^{2n-2} \end{pmatrix}$$

On constate que $C_j = \alpha^{j-1} C_1$, soit $\text{rg } A \leq 1$. **Attention!** Toutes les colonnes colinéaires ne donnent pas rang 1 mais rang ≤ 1 car il y a le cas de nullité. **Comme** $C_1 \neq 0$, car $a_{11} = 1$, il vient $\text{rg } A = 1$. On peut démontrer proprement la colinéarité :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad C_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} = (\alpha^{i+j-2})_{1 \leq i \leq n} = \alpha^{j-1} (\alpha^{i+1-2})_{1 \leq i \leq n} = \alpha^{j-1} C_1$$

Attention! aussi au « En déduire ». Le théorème du rang amène $\dim \text{Ker } A = E(0) = n - 1$, puis par théorème la multiplicité de 0 vérifie $\mu(0) \geq n - 1$. La trace étant la somme des valeurs propres **complexes**, il suit :

$$\text{tr } A = \underbrace{0 + \dots + 0}_{n-1} + \lambda = \sum_{i=1}^n \alpha^{2i-2} = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha^2)^k = \begin{cases} \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} & \text{si } \alpha^2 \neq 1 \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Attention! à ne pas oublier le cas de la raison = 1 où la formule ne « marche » pas. Les valeurs propres sont donc 0 (de multiplicité au moins égale à $n - 1$) et λ mais **Attention!** λ peut-être aussi égale à 0 ...

3) On a fait une petite erreur dans cette question ce matin. Ce serait très bien si vous vous rappelez où. Les cas de diagonalisabilité de A ne sont pas difficiles à deviner, ils proviennent de la question précédente.

- Si $\alpha^{2n} = 1$, A possède 2 valeurs propres distinctes :
 - 0 de multiplicité $n - 1$ et $\dim E(0) = \dim \text{Ker } A = n - 1 = \mu(0)$
 - $\lambda \neq 0$ de multiplicité 1 et alors **nécessairement** $\dim E(\alpha) = 1$

Par suite, comme pour toute valeur propre, la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité, A est diagonalisable.

- Si $\alpha^{2n} = 1$, soit α racine $2n$ -ième de 1, $\alpha = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ avec $0 \leq k \leq 2n - 1$. Ici $\lambda = 0$ **sauf dans le cas** $\alpha^2 = 1$, soit $\alpha = \pm 1$. Elle n'est pas diagonalisable car 0 est de multiplicité n et $\dim E(0) = \dim \text{Ker } A = n - 1$. Si $\alpha = \pm 1$, A

est diagonalisable car elle est réelle (symétrique).

On peut remarquer que $\alpha = \pm 1$ correspondent aux 2 cas $k = 0, n$,

Conclusion : A est diagonalisable ssi $\alpha \neq \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\} \cup \{n+1, \dots, 2n-1\}$

Remarques

- Le cas signalé de non diagonalisable correspond à une matrice **symétrique complexe** non diagonalisable.
- Dans ce cas, comme la seule valeur propre est 0, A est nilpotente. C'est le théorème de Cayley-Hamilton puisque son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.
- En fait, pour toute matrice de rang 1, on peut montrer (c'est simple) que $A^2 = \text{tr}(A) A$ et A diagonalisable ssi $\text{tr} A \neq 0$, ce qui est exactement ce qu'on a vu plus haut. Cette info, nous donne $A^2 = 0$, c'est un peu mieux que $A^n = 0$ vu plus haut.

IMT PSI 2023 (calcul de A^n) ☞

ENONCÉ 2 Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$

- 1) Calculez B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de A^n en fonction de n et B .
- 2) Calculez A^n en utilisant les cours de seconde année.

1) On peut commencer par remarquer que B (comme A) est symétrique réelle, et même que $\text{rg} B = 1$. On calcule immédiatement $B^2 = 3B$, $B^3 = 9B$, puis, par récurrence immédiate $B^n = 3^{n-1}B$. Faut-il faire la récurrence? La réponse est très simple, vous le demandez à l'examinateur ...

Remarque : Attention ! La formule n'est vraie que pour $n \geq 1$. Cela peut entraîner des erreurs par la suite.

$$\begin{aligned} A^n &= (aB + I)^n \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k B^k I^{n-k} \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k B^k I^{n-k} + I = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} B + I \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k B + I \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k 3^k - 1 \right) B + I \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{3} \left((1+3a)^n - 1 \right) B + I \end{aligned}$$

- (1) Le binôme de Newton s'applique **parce que** B et I commutent.
- (2) cf. remarque plus haut **Attention !** au cas $k = 0$, à part.
- (3) On rajoute (et enlève) le cas $k = 0$
- (4) Formule du binôme de Newton à l'envers.

$$\text{Finalement } A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 \end{pmatrix}$$

On demande à l'examinateur si on écrit cette matrice 3×3 car elle est assez longue à écrire.

2) Je rappelle qu'il y a 2 méthodes en spé, plus générales que celle de la question précédente (qui n'en est pas une

d'ailleurs) et qui convient parce que c'est la matrice I plus une matrice simple! L'une est plus facile à comprendre mais plus fastidieuse niveau calcul et utilise la diagonalisation. L'autre est plus efficace mais nécessite d'avoir bien assimilé les polynômes annulateurs.

Méthode 1 usuelle par diagonalisabilité :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & -a & -a \\ -a & \lambda - 1 - a & -a \\ -a & -a & \lambda - 1 - a \end{vmatrix} = \dots = \lambda^3 - (3+3a)\lambda^2 + (6a+3)\lambda - 3a - 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3a - 1)$$

C'est fastidieux à cause du paramètre a , je ne vous ai pas mis les détails, on « pourrait » y passer 10-15mn! Il y a un peu plus « rusé ». $\text{rg} B = 1$ donc 0 est vp et de multiplicité $\mu(0) \geq \dim \text{Ker } B = 3 - \text{rg} B = 2$. Il manque 1 valeur propre qu'on trouve par la trace $\text{tr} B = 0 + 0 + \lambda = 3$. Ensuite on se rappelle que si M a pour vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $\alpha B + \beta I$ a pour vp $\alpha \lambda_i + \beta \times 1$ (Il suffit de diagonaliser (ou de trigonaliser dans \mathbb{C}) $M = PDP^{-1}$ puis $\alpha M + \beta I = P(\alpha D + \beta I)P^{-1}$). Comme 0,0,3 donne 1, 1, $1 + 3a$, on retrouve le même résultat.

Comme A est diagonalisable (car symétrique réelle), on sait que la dimension des espaces propres est égale à leur multiplicité donc $E(1)$ est un plan et $E(1 + 3a)$ une droite. On commence par l'hyperplan, c'est toujours plus facile.

Calcul de $E(1) = \text{Ker}(I - A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(1) \iff (I - A)X = 0 \iff ax + ay + az = 0$$

Il y a le cas $a = 0$ dont **il faut parler** à l'examineur mais qui est sans intérêt puisque $A = I$! Dans le cas $a \neq 0$, $E(1)$ est donc un **plan** dont une base est $\text{Vect}\left(\underbrace{(1, -1, 0)}_{e_2}, \underbrace{(1, 0, -1)}_{e_3}\right)$.

Calcul de $E(3a + 1) = \text{Ker}((3a + 1)Id - A)$

On sait que c'est une droite. On peut chercher à résoudre le système 3×3 mais je ne le traite pas ici car il y a plus malin : si on sait bien son cours, les espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux, donc cette droite est la droite orthogonale au plan précédent qui est alors la droite dirigée par $(1, 1, 1) = e_1$.

On **diagonalise** A . Je vous fais ici le raisonnement complet : comme $E(1) \oplus E(1 + 3a) = \mathbb{R}^3$, par complémentarité, $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . On pose ε la base canonique de \mathbb{R}^3 et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'**endomorphisme canoniquement associé** à A . On pose, par exemple :

$$P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_\varepsilon^{\mathcal{F}} \quad P^{-1}AP = (P_\varepsilon^{\mathcal{F}})^{-1} \text{Mat}(a, \varepsilon) P_\varepsilon^{\mathcal{F}} = \text{Mat}(a, \mathcal{F}) = \begin{matrix} e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} a(e_1) & a(e_2) & a(e_3) \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

puis, sans détailler le calcul de P^{-1} (je suppose que vous savez faire) :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+3a)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 \end{pmatrix}$$

Vous voyez comme ce calcul est long! (presque) impossible à traiter dans le temps imparti!

Méthode 2 par recherche d'un polynôme annulateur :

On commence par chercher un polynôme annulateur **de degré minimum**, c'est mieux pour les calculs (on l'appelle polynôme minimal mais ce n'est pas au programme). Si on sait son cours : comme A est diagonalisable de vp 1 et $1+3a$ (**Attention!** pour $a \neq 0$), un polynôme annulateur est $P(X) = (X-1)(X-1-3a)$ (c'est même le polynôme minimal). Notons que **Cayley**¹-**Hamilton**² nous en donne un, mais de degré 3 qui est $(X-1)^2(X-1-3a)$.

Comme le demande la méthode, on effectue la **division euclidienne** de X^n par $P(X)$ qui amène :

$$X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X) = (X-1)(X-1-3a)Q_n(X) + a_nX + b_n$$

Il n'y a pas besoin de calculer le quotient, seulement le reste $R_n(X)$. Les valeurs en $X=1$ et $X=1+3a$:

$$\begin{cases} 1^n & = & a_n + b_n \\ (1+3a)^n & = & (1+3a)a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n & = & \frac{1}{3a}((1+3a)^n - 1) \\ b_n & = & \frac{1}{3a}(3a+1 - (1+3a)^n) \end{cases}$$

En « évaluant » en A (polynômes de matrices) $A^n = a_nA + b_nI = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 & (1+3a)^n - 1 \\ (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n - 1 & (1+3a)^n + 2 \end{pmatrix}$

CCINP PSI 2023-2022 (Suite récurrente et trigonalisation par blocs)

ENONCÉ 3 Soient $\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + 4v_n - w_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ [2022 : $u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 0$]

- 1) Ecrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ en explicitant la matrice A . Donner X_n en fonction de A, X_0 et n
- 2) A est elle diagonalisable?
- 3) Trouvez une matrice P tq $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. [2022 : Calculer les esp. prop. et donner une base de \mathbb{R}^3 où la mat. est triangulaire]
- 4) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n .

1) En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a immédiatement $X_{n+1} = AX_n$.

2) Une récurrence immédiate amène $X_n = A^n X_0$ (on ne la fait pas! on demande au correcteur s'il veut qu'on la fasse)

1. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.

2. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connus pour la découverte des quaternions.

3) On calcule le polynôme caractéristique (je ne mets pas les détails) $\chi_A = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$. La matrice n'est pas diagonalisable car sinon elle serait semblable à $2I_3$, soit **égale à $2I_3$!**, ce qui visiblement n'est pas (on pourrait aussi calculer la dimension de l'espace propre $E(2)$, par le rang par exemple, mais c'est plus long)

4) Je ne mets pas les détails : on trouve que l'espace propre associé à 2 est le plan $x - 2y + z = 0$. Comme on est dans le cas où la dimension totale de tous les espaces propres (la somme de toutes les dimensions) est $n - 1$ (ici $3 - 1 = 2$) (cad il en « manque 1! »), c'est facile : on prend une famille libre de $n - 1$ vecteurs propres et on complète par n'importe quel vecteur qui forme une base (un vecteur de la base canonique, c'est mieux! et il y en a forcément 1 (je vous laisse y réfléchir)).

On prend donc, par exemple, $e_1 = (2, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$ et par exemple $e_3 = (1, 0, 0)$ (on vérifie qu'il n'appartient pas au plan!). Pour écrire la matrice de A (ou mieux dit, de l'endomorphisme a canoniquement associé à A) dans cette base, il reste juste à calculer l'image de e_3 (pourquoi?). L'image de e_3 , c'est la première colonne, sauf que ce sont ses coordonnées dans l'ancienne base (canonique) **pas dans** la nouvelle base (e_1, e_2, e_3) qu'il faut donc calculer par un petit système :

$$(1, -1, -1) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(1, 0, 0) \iff \begin{cases} 1 &= 2\alpha + \beta + \gamma \\ -1 &= \alpha \\ -1 &= -\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= 2 \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$\text{Mat}(a, (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} T \quad \text{ou} \quad P^{-1}AP = T \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Il reste à calculer A^n , on peut utiliser $A^n = PT^nP^{-1}$ mais ceci oblige à calculer (conjecturer) T^n ce qui n'est pas si simple, sans parler du calcul de P^{-1} et du produit... En fait $Q(X) = (X - 2)^2$ est un polynôme annulateur (je vous laisse vérifier par vous-même $(A - 2I)^2 = 0$) et on applique l'autre méthode, que j'espère vous connaissez, de la division euclidienne de X^n par $Q(X)$. Le reste $R(X) = a_nX + b_n$ est de degré < 2 , il y a deux coefficients à trouver que l'on trouve par la valeur en 2 **et la dérivée** en 2 (exo usuel de Sup). Il y a un petit système à résoudre ensuite :

$$X^n = Q(X)(X - 2)^2 + a_nX + b_n \quad \begin{cases} 2^n &= 2a_n + b_n \\ n2^{n-1} &= a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n &= n2^{n-1} \\ b_n &= (1 - n)2^n \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 A^n &= n2^{n-1}A + (1-n)2^n I_3 = n2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (1-n)2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & n2^n & -n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n + 3n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & n2^n & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

6)

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Mines-Ponts PSI 2023-2022 (équation fonctionnelle aux valeurs propres) * ☞

ENONCÉ 4 Soient E le \mathbb{R} -ev des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , p et q deux réels avec $p + q = 1$ et $p \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \rightarrow f(px + q)$

- 1) Montrez que u est un automorphisme de E .
- 2) Montrez que les vp de u sont dans $] -1, 1]$
- 3) Montrez que si f est vecteur propre de u , il existe un entier k tq $f^{(k)} = 0$. En déduire l'ensemble des vecteurs propres de u . [2022 : Question absente] .
- 4) Calculez $u^n(f)(x)$ par récurrence. [2022 : Question absente] .

1) Il est immédiat que u est linéaire. C'est un endomorphisme car il est clair aussi que si f est C^∞ , g l'est aussi.

Comme $y = px + q \iff x = \frac{1}{p}y - \frac{q}{p}$ (car $p \neq 0$), u est bijective de réciproque $f \rightarrow [x \rightarrow f(\frac{1}{p}y - \frac{q}{p})]$

2) Soit λ une vp de u , donc il existe $f \neq 0$ tq $f(px + q) = \lambda f(x)$, pour tout x . En particulier pour $x = 1$, $f(1) = \lambda f(1)$.

On en tire $\lambda = 1$ ou $f(1) = 0$.

On construit la suite récurrente $u_0 = x$, $u_{n+1} = pu_n + q$, puis $u_{n+1} - 1 = p(u_n - 1)$ et l'hypothèse $|p| < 1$ amène donc que la suite (u_n) converge vers 1

Si $\lambda \neq 1$, . On peut aussi écrire :

$$f(u_{n+1}) = \lambda f(u_n) \implies f(u_0) = f(x) = \frac{1}{\lambda^n} f(u_n)$$

Si $|\lambda| \geq 1$, $f(u_n) \rightarrow f(1) = 0$, par continuité de f en 1 et $\frac{1}{\lambda^n}$ bornée. On en déduit que $f(x)$ est nul **pour toute** valeur de x , ce qui est absurde.

Si $\lambda = 1$, $f(px + q) = f(x)$ amène à $f(u_{n+1}) = f(u_n) = \dots = f(u_0) = f(x)$, soit par passage à la limite par continuité de f , $f(x) = f(1) = cste$. Réciproquement, si f est constante, on a bien $u(f) = g = f$.

3) Pour $\lambda = 1$, les vecteurs propres qui sont les fonctions constantes vérifient immédiatement $f' = 1$, soit $k = 1$ convient.

Pour $\lambda \in]-1, 1[$, $f(px + q) = \lambda f(x)$ amène par dérivation

IMT PSI 2023 (diagonalisabilité matrice 5×5)

ENONCÉ 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) Déterminez le rang, l'image et le noyau de A .
- 2) Diagonalisez A .

1) On remarque $C_2 = C_3 = C_4$ et $C_4 + C_5 = C_1$ donc $\text{rg} A = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$ car il est clair que ces 2 colonnes ne sont pas liées.

Comme $\text{Im} A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \text{Vect}(C_1, C_2)$, la remarque précédente nous donne immédiatement que (C_1, C_2) est une base de $\text{Im} A$.

Pour trouver le noyau, on s'aide du théorème du rang : $\dim \text{Ker} A = 5 - 2 = 3$.

On résout le système 5×5 associé, il ne reste que 2 lignes car les autres sont égales. On met les 5 variables en fonction de 3 paramètres (dimension 3) (Vous pourriez aussi appliquer la méthode du pivot, à vous de voir, je ne le fais pas ici) :

$$(x, y, z, t, u) \in \text{Ker} A \iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z - t \\ y = y \\ z = z \\ t = t \\ u = y + z + t \end{cases}$$

Une base de $\text{Ker} A$ est donc $((-1, 1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0, 1), (-1, 0, 0, 1, 1))$

2) L'énoncé nous fait comprendre que A est probablement diagonalisable. On a déjà 0 valeur propre associé à $\text{Ker} A$ de dimension 3, donc la multiplicité de 0 vérifie $\mu(0) \geq 3$. Il reste 2 vps à trouver. La trace ne permettra pas de conclure, néanmoins elle donne $\text{tr} A = 1 = 0 + 0 + 0 + \lambda + \mu$. La question est : calcule t-on ce polynôme caractéristique, car c'est un déterminant d'ordre 5? Si on est doué en calcul, on peut peut-être deviner 2 couples vecteurs propres / valeurs propres indépendants, mais abandonnons cette idée; il y a plein de 0, le déterminant

ne devrait pas être trop difficile :

$$\begin{aligned}
 \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{C_5 \leftarrow C_5 - C_1} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{dev } L_2 \\ \equiv 1}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\lambda} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{dev } L_2 \\ \equiv \lambda}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\lambda} \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \right) \\
 &= \lambda^2(-(\lambda+1) + (1-\lambda)) - \lambda(\lambda(-(\lambda+1) + (1-\lambda)) - \lambda(\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) + (1-\lambda) + \lambda(1-\lambda) - (\lambda+1))) \\
 &= \lambda^5 - \lambda^4 - 6\lambda^3 = \lambda^3(\lambda-3)(\lambda+2)
 \end{aligned}$$

A l'avant-dernier = on peut être astucieux : les 2 premiers termes sont (cours) $\lambda^5 - \text{tr}(A)\lambda^{5-1}$ donc **rien à calculer**. D'autre part, d'après la multiplicité 3 de 0, il n'y a que du λ^3 , donc que du λ^3 **à compter!** Gros gain de temps. A cette étape, on a la preuve que A est diagonalisable, puisque chaque espace propre a une dimension égale à la multiplicité de sa valeur propre : pour 0, on sait que c'est 3, et pour les 2 autres, c'est nécessairement 1, c'est du cours.

Calcul de l'espace propre associé à -2 :

On sait que c'est une droite puisque la multiplicité est 1. Ici, vu la difficulté, c'est une bonne idée d'appliquer la méthode du pivot. On cherche le noyau de $+2I_5 - A$. J'entoure à chaque étape le pivot choisi; on peut ne pas mettre

les variables et les mettre à la fin, c'est plus rapide

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_1 \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 5L_2 \end{array}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

On peut s'arrêter ici pour le calcul. Les 2 dernières lignes sont colinéaires ce qui fait qu'à la prochaine et dernière étape (je répète, ce n'est pas utile pour le calcul), il y aura une 5^e ligne avec que des 0. C'était attendu car le rang est 4 (dimension du noyau 1), vous voyez? On revient au système triangulaire, que l'on résout de proche en proche, je ne mets que la fin.

$$(x, y, z, t, u) \in \text{Ker}(2I - A) \iff \begin{cases} -x - 2y - u = 0 \\ y - z - t - u = 0 \\ 2z + 2u = 0 \\ 2t + 2u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = -u \\ z = -u \\ t = -u \\ u = u \end{cases}$$

$$E(-2) = \text{Vect}(1, -1, -1, -1, 1)$$

Calcul de l'espace propre associé à -2 :

Procédé similaire, je ne mets que le résultat $E(3) = \text{Vect}(3, 2, 2, 2, 3)$

On termine en donnant d'abord P , la matrice de changement de bases, puis D . Je ne mets pas les détails, je sais que vous savez faire. Si vous voulez voir le raisonnement optimal que l'on peut dire, regardez l'exo 1 méthode 2 qui détaille ce processus.

ENONCÉ 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Diagonalisez U

2) On suppose A diagonalisable. B est-elle diagonalisable? trouvez les vp de B en fonction de celles de A

1) $\chi_U(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr} U \lambda + \det U = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. Je ne mets pas les détails, on calcule immédiatement $E(0) = \text{Ker} U = \text{Vect}(1, -1) = \text{Vect}(e_1)$ et $E(1) = \text{Ker}(\text{Id} - U) = \text{Vect}(1, 0) = \text{Vect}(e_2)$. Comme χ_U est scindé à racines simples, U est diagonalisable donc, via la somme directe $E(0) \oplus E(1) = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

On pose $P = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^2 à la base \mathcal{E} . On sait alors, via la formule de changement de bases, que $P^{-1}UP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) A est diagonalisable, donc il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples, noté P , tel que $P(A) = 0$. Calculons les B^k , je ne mets pas les détails, on conjecture très vite que $B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On le (demande à l'examinateur) démontre par récurrence. Ensuite, si $P = \sum_{i=1}^p a_k X^k$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^p a_k B^k = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p A^k & \sum_{i=1}^p A^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P annule B et est **scindé à racines simples** donc B est diagonalisable.

Posons $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ avec λ_i les vps **distinctes** de A et m_i leur multiplicité. On calcule le polynôme caractéristique de B

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - B) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & A \\ 0 & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det(\lambda I_n - A) \det(\lambda I_n) = \lambda^n \chi_A(\lambda) = \lambda^n \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants diagonaux. Les vps de B sont les λ_i et 0 mais **Attention!** l'un des λ_i peut être égal à 0.

Pour répondre un peu mieux à la question, les vps de B « en fonction » de celles de A , il faut utiliser U de la question 1, ses vps sont 1 et 0. En fait les vps de B sont 1 λ_i et 0 λ_i (je vous laisse vérifier), cela d'ailleurs en fait bien $2n$, comme la taille de B .

Remarque : On remarque que $B = \begin{pmatrix} 1A & 1A \\ 0A & 0A \end{pmatrix}$, on « y » retrouve U dans les coeffs. En fait ceci s'appelle produit tensoriel de U et A (ce n'est pas au programme!), on note $B = U \otimes A$. On démontre alors que si A et U sont diagonalisables, $U \otimes A$ l'est, que si les vps de U sont les μ_j et celles de A les λ_i , alors celles de $U \otimes A$ sont les $\lambda_i \mu_j$

ENONCÉ 16 Soit E l'ev des fonctions polynomiales. Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \rightarrow e^{-x} \int_{-\infty}^x P(t) e^t dt$.

1) Montrez L endomorphisme de E .

2) Trouvez les éléments propres de L .

1) La première chose à établir est la convergence de l'intégrale : elle résulte de la continuité de $t \rightarrow P(t)e^t$ sur $] -\infty, x]$ et du fait que $P(t)e^t = o_{-\infty}(\frac{1}{t^2})$

Linéarité immédiate. Reste à prouver endo, cad que $L(P)$ est bien un polynôme. Par linéarité, il faut et il suffit de l'établir pour chaque monôme d'une base comme $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. En fait, ici ça ne simplifie pas vraiment le calcul, car on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $P(X)e^X$ est nécessairement de la forme $Q(X)e^X$ avec Q de même degré, en ajoutant les croissances comparées en $-\infty$, le résultat suit.

2) Analyse : Soit λ vp de L , alors $L(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$ puis $\int_{-\infty}^x P(t)e^t dt = \lambda e^x P(x)$, qui, par dérivation (théorème fondamentale de l'analyse par continuité de la fonction-intégrande et convergence en la borne $-\infty$ (lire plus bas)) amène à $P(x)e^x = \lambda e^x(P(x) + P'(x))$, puis P solution de l'équation différentielle $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ sur \mathbb{R} .

Si $\lambda = 0$, on aboutit à $y = 0$ qui n'est pas possible et sinon, l'équation différentielle s'intègre en $y(x) = Ce^{(1-\lambda)x/\lambda}$

Réciproque : $Ce^{(1-\lambda)x/\lambda}$ n'est un polynôme que ssi $\lambda = 1$

Conclusion : $\text{Sp } T = \{1\}$ et $E(1) = \text{Vect}(1)$

Remarques

- **Attention !** le théorème fondamental de l'analyse s'énonce : si f continue sur I et $a \in I$, alors $\int_a^x f$ est C^1 sur I de dérivée f . Il ne donne donc pas exactement le résultat plus haut, car $-\infty$ ne peut-être dans l'intervalle. En fait, il suffit d'écrire $\int_{-\infty}^x f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^x f$ et de dériver pour établir que le résultat reste vrai quand la borne est $-\infty$, à condition, bien sûr, que l'intégrale converge.
- T est bijective, il est aisé de démontrer que la bijection réciproque est $P(X) \rightarrow P(x) + P'(x)$

IMT PSI 2023 (diagonalisabilité endomorphisme matrices)

ENONCÉ 21 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow M - \text{tr}(M)A$.

- 1) Déterminez les éléments propres de φ .
- 2) Calculez $\det \varphi$.

1) On peut commencer par remarquer que φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le cas $A = 0$ est sans intérêt puisque φ est l'identité (j'espère que vous savez donner ses éléments propres). On suppose désormais $A \neq 0$

Analyse :

Si λ vp de φ , $\varphi(M) = M - \text{tr}(M)A = \lambda M$ avec $M \neq 0$, puis $(1 - \lambda)M = \text{tr}(M)A$.

- **Ou** $\lambda = 1$, et alors $\text{tr}(M) = 0$, **car** $A \neq 0$
- **Ou** $\lambda \neq 1$, et alors M est **colinéaire** à A

Il faut comprendre que l'analyse peut être considérée comme terminée car on a trouvé au plus 2 vps : $\lambda = 1$ (éventuellement) et celle associée à A (éventuellement). Il suffit dans la réciproque de chercher les 2 noyaux associés pour voir s'ils sont nuls ou pas.

Réciproque :

$\varphi(A) = A - \text{tr}(A)A = (1 - \text{tr}(A))A$. **Comme** $A \neq 0$ (**Attention !** très important de vérifier ce non nul), alors $\lambda = 1 - \text{tr}(A)$ est vp et l'espace propre associé $E(\lambda) \supset \text{Vect}(A)$. **Attention !** ici aussi au raisonnement : à priori, il n'y a pas égalité (d'autres matrices « pourraient » convenir).

On cherche $E(1)$. S'il est nul, 1 n'est pas vp, s'il est non nul, 1 est vp et on a trouvé en plus l'espace propre associé :

$$\varphi(M) = M \iff -\operatorname{tr}(M)A = 0 \iff \operatorname{tr}(M) = 0 \quad \text{car } A \neq 0$$

1 est donc bien vp et $E(1)$ est l'hyperplan des matrices de trace nulle (hyperplan car noyau de la forme linéaire non nulle tr), de dimension $n^2 - 1$.

Pour des raisons de dimension (la somme totale des dimensions des espaces propres ne peut dépasser celle de l'ev et d'ailleurs elle est égale à celle de l'ev ssi diagonalisable), nécessairement $E(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{Vect}(A)$

Remarque : Il y a une erreur de raisonnement. Afin que vous réfléchissez bien pour la trouver, sans « tricher » involontairement avec le regard, j'explique sur la page suivante

Le problème est que l'on présuppose que $1 - \text{tr}(A)$ est **une autre** vp, ce qui n'a aucune raison d'être! 2 cas donc :

- **Ou** $1 - \text{tr}(A) \neq 1$, c'est le cas étudié : $\text{Sp } \varphi = \{1, 1 - \text{tr}(A)\}$ et $E(1) = \text{Ker tr}$, $E(1 - \text{tr}(A)) = \text{Vect}(A)$. φ est même diagonalisable car $\dim E(0) + \dim E(1 - \text{tr}(A)) = n^2 - 1 + 1 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- **Ou** $1 - \text{tr}(A) = 1 \iff \text{tr}(A) = 0$. Il n'y a alors **qu'une vp** (donc de multiplicité n car on est dans \mathbb{C}). $\text{Sp } \varphi = \{1\}$ et $E(1) = \text{Ker tr}$. φ n'est **pas** diagonalisable dans ce cas (sinon φ serait une homothétie $1 \cdot \text{Id}$, c'est d'ailleurs le cas particulier $A = 0$ qui est bien de trace nulle)

2) On reprend les 2 cas :

- **Ou** $\text{tr}(A) \neq 0$, 1 est vp de multiplicité $n^2 - 1$ et $1 - \text{tr}(A)$ de multiplicité 1, donc $\det \varphi = 1^{n^2-1}(1 - \text{tr}(A)) = 1 - \text{tr}(A)$
- **Ou** $\text{tr}(A) = 0$. 1 est vp de multiplicité n^2 , soit $\det \varphi = 1^{n^2} = 1$

On peut avoir la trace de φ de manière analogue avec des sommations...

II — RÉDUCTION : AUTRES

*Mines-Ponts PSI 2023 (polynôme annulateur) **

ENONCÉ 24 Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$

1) Vérifiez $P(2) = P'(2) = 0$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Trouvez les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tq il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P(M) = 0$, $\det M = \pm 1$ et $\text{tr}(M^3) = 0$.

1) De $P(2) = P'(2) = 0$, on déduit $(X-2)^2 | P(X)$. On calcule alors $P(X) = (X-2)^2(X^3 + 2X^2 + 2X + 1)$. Racine évidente -1 puis $P(X) = (X-2)^2(X+1)(X^2 + X + 1)$ qui est la décomposition en polynômes irréductibles sur \mathbb{R} (degré 1 et degré 2 sans racines réelles) et dans \mathbb{C} , c'est $P(X) = (X-2)^2(X+1)(X-j)(X-j^2)$.

2) **Analyse :**

Puisque P est annulateur, $\text{Sp}_{\mathbb{C}} M \subset \{-2, 2, j, j^2\}$. P n'est malheureusement pas scindé à racines simples. Notons respectivement m, p, q les multiplicités au sens large, (cad 0 possible si la valeur n'est pas vp) de $-1, 2, j$, la multiplicité de j^2 étant aussi q par conjugaison puisqu'on recherche une matrice réelle. On sait que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, si M a pour vps **complexes** $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, comptées avec la multiplicité, la matrice $Q(M)$ a pour vp les $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$ (je ne le redémontre pas ici, il suffit de trigonaliser dans \mathbb{C}). On a donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} m + p + 2q = n \\ \det M = (-1)^m 5^p j^q (j^2)^q = \pm 1 \\ \text{tr } M^3 = m(-1)^3 + p5^3 + qj^3 + q(j^2)^3 = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} m + p + 2q = n \\ 5^p = 1 \\ -m + 5^3 p + 2q = 0 \end{array} \right. \implies n = 4q$$

On a aussi $m = 2q$, utile pour la réciproque. n multiple de 4 est une condition nécessaire.

Réciproque :

n est multiple de 4, il suffit, en considérant des matrices diagonales par le même bloc 4×4 de trouver **une** matrice 4×4 qui convient. On la prend diagonale par blocs, elle aussi, $M = \text{Diag}(-1, -1, R)$ où R est la (matrice de) rotation

d'angle (de mesure) $\frac{2\pi}{3}$ (qui aura bien pour vp *jet* j^2 , c'est $R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$).

- Elle annule $Q(X) = (X + 1)(X^2 + X + 1)$ car ses blocs le font et $Q(X) | P(X)$ donc P annulateur. Ok.
- $\det(M) = (-1)^2 j j^2 = 1$. Ok.
- $M^3 = \text{Diag}((-1)^3, (-1)^3, R^3)$ où R^3 est la rotation d'angle (de mesure) $3 \frac{2\pi}{3}$, donc est égale à I_2 , donc $\text{tr } M^3 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$. Ok.

Remarque : Je rappelle, même si ce n'est pas au programme stricto-sensu, que les 2 vps de la rotation dans le plan d'angle (de mesure) θ sont $e^{\pm i\theta}$.

*Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle) **

ENONCÉ 27 Soient E un \mathbb{R} -ev de dimension n et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminez les applications $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\alpha u^3 = \text{tr}(u^2)u$.

Analyse - Réciproque :

Si $\alpha u^3 = \text{tr}(u^2)u$, $u^3 = \frac{\text{tr}(u^2)}{\alpha} u$.

- Si $\text{tr}(u^2) = 0$, $u^3 = 0$ donc u nilpotente d'indice ≤ 3 . Réciproquement, u^2 aura pour vp 0^2 à la multiplicité n , car 0 est la seule vp de u (les vps complexes de $P(M)$ sont les $P(\lambda)$ si λ sont celles de M , comptées avec la multiplicité), donc $\text{tr}(u^2) = 0$ et égalité ok. On peut considérer que ce cas contient le cas $u = 0$
- Si $\frac{\text{tr}(u^2)}{\alpha} = a^2 > 0$, $\text{Sp } u \subset \{0, -a, a\}$ et u diagonalisable car $X^3 - a^2 X$ est scindé à racines simples. Notons l, m, p ($l + m + p = n$) les multiplicités respectives (au sens large) de $0, -a, a$, multiplicité 0 indiquant non vp. Alors u^2 a pour vps 0 et a^2 de multiplicités l et $m + p$, soit $\text{tr}(u^2) = (m + p)a^2$, donc $\alpha = m + p$ entier non nul dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ ($u \neq 0$);

Réciproquement, si α est **entier** $= q \in \llbracket 1; n \rrbracket$, tout endomorphisme diagonalisable de vps a , **réel quelconque non nul**, de multiplicité m avec $0 \leq m \leq q$, $-a$ de multiplicité $q - m$ et 0 de multiplicité $n - q$ convient puisqu'elle annulera le polynôme $X(X - a)(X + a) = X^3 - a^2 X$ avec $\text{tr}(u^2) = ma^2 + (q - m)a^2 + 0 = qa^2 = \alpha a^2$

- Si $\frac{\text{tr}(u^2)}{\alpha} = -a^2 < 0$, $\text{Sp } u \subset \{0, -ia, ia\}$. Raisonnement similaire avec en plus $m = p$, par réalité, et donc α est ici, nécessairement, un entier pair de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par contre **Attention !** à la réciproque : si α **entier pair** $= 2q \in \llbracket 1; n \rrbracket$, tout endomorphisme **réel** diagonalisable dans \mathbb{C} de vps ia , **réel quelconque non nul**, de multiplicité q , $-ia$ de multiplicité q et 0 de multiplicité $n - 2q$ convient puisqu'elle annulera le polynôme $X(X - ia)(X + ia) = X^3 + a^2 X$ avec $\text{tr}(u^2) = -qa^2 - qa^2 + 0 = -2qa^2 = -\alpha a^2$.

Est-ce suffisant de dire cà (un endomorphisme réel diagonalisable dans \mathbb{C})? En passant aux matrices, on peut préciser en donnant, à une matrice inversible P près, cad à une similitude près, les matrices diagonales par blocs de blocs de taille 1 égaux à 0 et de blocs 2×2 réels ayant pour vps ia et $-ia$ ($a \neq 0$). Par Cayley-Hamilton, ce sont toutes les matrices 2×2 de trace nulle ($-ia + ia$) et de déterminant égal à $ia \times (-ia) = a^2$,

soit $\begin{pmatrix} b & (b^2 + a^2)c \\ -\frac{1}{c} & -b \end{pmatrix}$ avec $b, c \neq 0$ quelconques.

ENONCÉ 28 Soit A non nulle vérifiant $A^3 + 9A = 0$.

- 1) Montrez que le spectre complexe de A est inclus dans $\{0, 3i, -3i\}$.
- 2) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 3) Montrez que si n est impair, alors A n'est pas inversible.
- 4) Montrez que A ne peut être une matrice symétrique.

1) A annule le polynôme $X^3 + 9X = X(X^2 + 9) = X(X + 3i)(X - 3i)$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}} M \subset \{0, 3i, -3i\}$. Faut-il redémontrer ce cours? Il faut le demander à l'examineur. En tous cas je vous conseille d'aller réviser cette démonstration dans votre cours, elle tombe souvent.

2) Ce polynôme est scindé à racines simples dans \mathbb{C} , donc on peut en déduire que cette matrice A est diagonalisable dans \mathbb{C} . Ce polynôme **n'est pas** scindé dans \mathbb{R} , mais **Attention!**, on ne peut rien en déduire. Pas d'erreur de raisonnement à l'envers!

Il faut quand même répondre à la question! S'il y a des vps complexes, la matrice n'est certainement pas diagonalisable dans \mathbb{R} . **S'il n'y a pas** de vp complexe, la seule vp réelle possible est 0. Je vous rappelle : **si** une matrice est diagonalisable **et** n'a qu'une **seule** vp α , ce ne peut être **que** αI !. Démo : $M = PDP^{-1} = P \text{Diag}(\alpha, \dots, \alpha) P^{-1} = P \alpha I P^{-1} = \alpha I$. Donc, si on revient à cet exo, la seule matrice diagonalisable possible sur \mathbb{R} ne peut être que $0I = 0$. Or cette matrice est exclue par hypothèse. **Conclusion** : A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

3) On se rappelle qu'une matrice est inversible ssi 0 **n'est pas** vp et on se rappelle aussi que toute matrice de taille impaire a nécessairement (au moins) une vp réelle. Dans cet exo, cela amène que, si n est impair, 0 est vp, donc A n'est pas inversible.

4) Si A est symétrique, elle ne peut être réelle car alors elle serait diagonalisable sur \mathbb{R} , ce qui est exclus d'après Q2. Peut-elle être symétrique complexe? Oui : il suffit de prendre n'importe quelle matrice **diagonale** en mettant sur la diagonale n'importe lequel des 3 nombres 0, $3i$ et $-3i$, on aura nécessairement $A^3 + 9A = 0$ puisque les coefficients diagonaux le vérifient, $z^3 + 3z = 0$. Il y a sans doute une erreur (de report) d'énoncé, il manque matrice réelle quelque part dans l'énoncé.

ENONCÉ 31 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

- 1) Montrez, si P est un polynôme annulateur de A , les valeurs propres de A sont racines de P .
- 2) Montrez la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.
- 3) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouvez $AX = XB \iff X = 0$.
- 4) Montrez, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AX - XB = M$.

1) C'est du cours! Soit λ une valeur propre, ; il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Puis, par récurrence immédiate, $A^k X = \lambda^k X$ (**Attention!** à ne pas écrire AX^k ou $(AX)^k$ qui n'ont aucun sens mathématique). En posant $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, il vient :

$$0 = P(A)X = \left(\sum_{k=0}^p a_k A^k \right) X = \sum_{k=0}^p a_k A^k X = \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k X = \left(\sum_{k=0}^p a_k \lambda^k \right) X = P(\lambda)X$$

Comme $X \neq 0$, il vient $P(\lambda) = 0$.

Remarque : Attention! il n'y a qu'un sens. Les racines de P ne sont pas nécessairement valeurs propres!

2) Le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur \mathbb{C} : $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, les λ_i étant éventuellement répétés avec la multiplicité. Donc $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i \text{Id})$. En utilisant le résultat du cours : $B - \lambda \text{Id}$ est inversible ssi λ n'est pas valeur propre de B , comme aucun des λ_i , qui est valeur propre de A , n'est valeur propre de B , chaque $B - \lambda_i \text{Id}$ est inversible. Par suite, leur produit $\chi_A(B)$ est inversible aussi.

Remarque : Attention! si vous utilisez des morphismes : le produit \prod « devient » un \circ (composée).

3) Un seul sens non trivial est à établir. On suppose donc $AX = XB$ avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, on écrit :

$$A^2 X = A AX = A XB = (AX) B = XB B = XB^2$$

Une récurrence immédiate amène $A^k X = XB^k$. Puis par sommation :

$$\sum_{k=0}^p a_k (A^k X) = \left(\sum_{k=0}^p a_k A^k \right) X = \sum_{k=0}^p a_k (XB^k) = X \left(\sum_{k=0}^p a_k B^k \right)$$

On vient de démontrer que, pour un polynôme **quelconque** complexe, $P(A) \times X = X \times P(B)$. Il faut alors penser à utiliser la question précédente : $\chi_A(A) \times X = X \times \chi_A(B)$. Le théorème de Cayley-Hamilton amène $\chi_A(A) = 0$ puis $X \times \chi_A(B) = 0$. **Mais** la matrice $\chi_A(B)$ est inversible. Il suit $X = 0$.

Remarque : Je rappelle que $AB = 0$ et $B \neq 0$ donc $A = 0$ est une **grave erreur**... Par contre la conclusion est vraie si B inversible...

4) Il faut, là-encore, voir comment la question précédente peut nous aider. On considère l'application $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow AX - XB$. Elle est clairement linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie (n^2 je vous rappelle). Elle est **injective** d'après la question précédente (je vous laisse y réfléchir), donc **surjective**, donc bijective, ce qui prouve la question, puisqu'elle **équivaux à** Montrez $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(X) = M$ (je vous laisse y réfléchir aussi...).

CCINP PSI 2023-2022-2021 (endomorphisme de matrices)

ENONCÉ 38 Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E, u(M) = aM + bM^T$.

- 1)** Montrez que u est un endomorphisme.
- 2)** Trouvez un polynôme annulateur de u de degré 2.
- 3)** Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.
- 4)** Calculez $\text{tr } u$ et $\det u$.

1) Laissez au lecteur

2) On remarque que u s'écrit $u = a\text{Id} + b\tau$ avec $\tau : M \rightarrow M^T$. Or les valeurs propres de $a\text{Id} + \varphi$ sont immédiatement celles de φ augmentées de a et associées aux mêmes espaces propres puisque $\varphi(x) = \lambda x \iff (a\text{Id} + \varphi)(x) = (a + \lambda)x$. Par suite, τ étant une symétrie puisque $\tau^2 = 1$, on sait alors que ses valeurs propres sont -1 et 1, et que

$E_\tau(1) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_\tau(-1) = A_n$. On en déduit que les valeurs propres de u sont $a+b$, d'espace propre associé $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $a-b$, d'espace propre associé A_n .

Méthode 1 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et A_n de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Pour montrer u diagonalisable, on peut constater $\dim E_u(a+b) + \dim E_u(a-b) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2 (par un polynôme annulateur) : On calcule, en remarquant que Id et τ commutent, pour appliquer l'identité remarquable :

$$u^2 = a^2 \text{Id} + b^2 \tau^2 + 2ab\tau = (a^2 + b^2) \text{Id} + 2a(u - a \text{Id}) = (b^2 - a^2) \text{Id} + 2au$$

u annule le polynôme $X^2 - 2aX - (b^2 - a^2) = (X - (a+b))(X - (a-b))$, polynôme scindé à racines simples si $a+b \neq a-b \iff b \neq 0$. De toute façon, si $b=0$, u est diagonalisable puisque $u = a \text{Id}$. On retrouve d'ailleurs aussi les valeurs propres.

3) Connaissant toutes les valeurs propres λ et leurs multiplicités respectives μ , il suffit d'appliquer les formules du cours la trace est la somme des valeurs propres, soit la somme des $\mu\lambda$ et le déterminant le produit, soit le produit des λ^μ :

$$\text{tr } u = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = n^2 a + nb \quad \det u = (a+b)^{n(n+1)/2} (a-b)^{n(n-1)/2}$$

*Mines-Ponts PSI 2023 (commutants) **

ENONCÉ 39 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un C-ev de dim. n , $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, le commutant de f .

1) On suppose f possède n vp distinctes. Montrez que, pour tout $g \in C(f)$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tq $g = P(f)$.

2) On suppose que f est seulement diagonalisable. le résultat précédent reste-t-il vrai?

1) Je rappelle que le commutant de f est un sev de $\mathcal{L}(E)$. Se rappeler qu'il contient **toujours** les $P(f)$, qui forme un ev de dimension au + n par Cayley-Hamilton (vous voyez pourquoi?), et si le polynôme minimal (annulateur de degré minimum) est de degré p ($p \leq n$), c'est un sev de dimension p (vous voyez pourquoi?). La question, fréquente, est : en contient-il d'autres, que les polynômes en f ? La réponse est, cela dépend..., et, au passage (ce n'est pas du cours-programme), quand il n'en contient pas d'autres, on l'appelle endomorphisme (ou matrice) **cyclique**.

f possédant n vp distinctes est diagonalisable. En rappelant qu'un polynôme annulateur a pour racines les n vps, il est donc de degré $\geq n$ (sauf le polynôme nul). Et d'ailleurs, celui annulateur de degré minimum est de degré n et est $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$, c'est du cours (à part le mot minimal). Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f , avec e_i associé à λ_i . Posons $u = e_1 + \dots + e_n$ et considérons alors la famille $\mathcal{E} = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$. C'est une base de E (démonstration après).

Unicité : Soient 2 polynômes P, Q de degré $\leq n-1$ vérifiant $P(f) = Q(f)$ alors $P - Q$ est un polynôme annulateur de degré $\leq n-1$, ce qui est impossible sauf le polynôme nul, soit $P = Q$

Existence : Soit g dans le commutant de f . On a $g(u)$ est un vecteur de E , il s'écrit donc dans la base \mathcal{E} :

$g(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)$. Posons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n-1$:

$$g(f^i(u)) \stackrel{(1)}{=} f^i(g(u)) = f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)\right) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^i(u)) = P(f)(f^i(u))$$

- (1) g est dans le commutant de f
- (2) f est linéaire

On a donc l'égalité de g et $P(f)$ sur la base \mathcal{E} de E , soit $g = P(f)$.

La matrice de passage de la base \mathcal{F} à la famille \mathcal{E} est la matrice de Van der Monde $(\lambda_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$ (je vous laisse y réfléchir) donc inversible, car les λ_i sont 2 à 2 distincts, soit \mathcal{E} est une base.

Remarque : Nous venons de démontrer qu'un endomorphisme à n vps distinctes est cyclique.

2) Si f est diagonalisable (avec une vp au moins double), le résultat est en défaut. Par exemple, pour $n = 3$, on prend la matrice diagonale donc diagonalisable $D = \text{Diag}(1, 2, 2)$. Je vous laisse démontrer à la main que toutes les matrices 3×3 qui commutent est ensemble des matrices diagonales par blocs $\text{Diag}(\alpha, B)$ où B est une matrice 2×2 **quelconque**. Le commutant est ici de dimension 5 : il n'est donc pas égal à l'ensemble des polynômes de D qui est de dimension ≤ 3 (et même 2 si vous avez bien compris le préambule). Il n'est pas difficile de donner un contre-exemple en dimension n quelconque, je vous laisse le faire.

Attention !, Nous n'avons pas démontré que pour toute matrice avec une vp au moins double, le résultat est en défaut ... Ce n'était pas vraiment demandé, je pense.

Remarques

- Nous venons (presque...) de démontrer qu'un endomorphisme diagonalisable est cyclique ssi il a n vps distinctes.
- On démontre que le commutant est toujours de dimension $\geq n$ (même si le sev des polynômes en f est de dimension $< n$). En fait, le sev des polynômes en f est de dimension n ssi f est cyclique... Tout ceci, bien sûr, n'est pas du cours-programme mais « tombe » régulièrement.

*Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales) **
ENONCÉ 45 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$.
1) Montrez $\chi_A = \chi_B$.
2) A et B sont elles toujours semblables?

1) Par sommation et linéarité, on en déduit que pour tout polynôme P , $\text{tr} P(A) = \text{tr} P(B)$. Je rappelle, qu'en trigonalisant dans \mathbb{C} , on a que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les vp de M , comptées avec la multiplicité, alors (toutes) les vp de $P(M)$ sont les $P(\lambda_i)$.

Si A possède une vp λ qui n'est pas vp de B , on construit un polynôme P tq $P(\lambda) = 1$ et P s'annule sur toutes les autres valeurs propres de A et B . On aura donc $P(B)$ de vp toutes nulles, soit $\text{tr} P(B) = 0$ et $\text{tr} P(A) = \mu P(\lambda) \neq 0$ où

μ est la multiplicité de la vp $P(\lambda)$ de $P(A)$ (**Attention !** ce n'est pas nécessairement la multiplicité de λ dans A).

Absurde!

Conclusion : A et B ont les mêmes vp.

Si A et B ont une vp λ qui n'est pas à la même multiplicité, soit $\mu_A \neq \mu_B$. On construit un polynôme P tel ... (je vous laisse y réfléchir).

2) La réponse est non parce qu'avoir même vps est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que 2 matrices soient semblables. Elle est quand même suffisante si les n vp sont 2 à 2 distinctes ou si les deux matrices sont diagonalisables. Je vous donne un exemple d'une matrice 6×6 qui a, par exemple, 2 pour vp de multiplicité 4 et 3 de multiplicité 2. Je vous écris toutes les « possibilités » de semblable (par une matrice triangulaire « minimum » de Jordan).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On dit qu'il y a 10 **classes de similitude**; **Attention !**, cette façon « différente » de positionner les 1 est beaucoup plus complexe que vous ne le pensez. A titre d'exercice, **classez** ces matrices (elles ont toutes 0 vp triple) en classes de similitude (je vous laisse y réfléchir) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CCINP PSI 2023 (autour de f et f^2 diagonalisables) *

ENONCÉ 46 Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -ev de dimension finie non nulle.

- 1) On suppose f diagonalisable. Montrez f^2 diagonalisable.
- 2) On suppose f diagonalisable. Montrez $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
- 3) Soit λ une vp de f^2 non nulle et μ une racine carrée complexe de λ . Montrez $\text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id}) = \text{Ker}(f - \mu \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f + \mu \text{Id})$.
- 4) On suppose f^2 diagonalisable et inversible. Montrez f diagonalisable et inversible.
- 5) On suppose f^2 diagonalisable. Montrez f diagonalisable ssi $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

1) En prenant M une matrice de u dans une base quelconque de \mathbb{C}^n , M est diagonalisable, il existe donc $P \in$

$\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Par suite $M^2 = PD^2P^{-1}$. D^2 étant **diagonale**, M^2 est **semblable** à une matrice diagonale, donc diagonalisable.

Remarques

- On peut aussi utiliser les morphismes : f est diagonalisable, il existe donc une base de E (e_1, \dots, e_n) constituée de vecteurs propres de f , cad $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On a immédiatement $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i f(e_i) = \lambda_i^2 e_i$. Cette base est donc **aussi constituée de vecteurs propres de f^2** : f^2 est diagonalisable.
- On a donc, en raisonnant dans \mathbb{C} , $\text{Sp } u^2 = \{\lambda^2, \lambda \in \text{Sp } u\} = (\text{Sp } u)^2$: les n vp de u^2 sont les carrés des n vps de u , en les comptant avec la multiplicité.
- La réciproque est fautive : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je vous laisse y réfléchir.

2) On utilise la question précédente (la remarque). Si $\mu(0)$ est la multiplicité de 0 comme vp de f , c'est aussi la multiplicité de $0^2 = 0$ comme vp de f^2 , **puisque** $\lambda^2 = 0 \iff \lambda = 0$ (si vous avez tout compris, ceci (peut) être faux pour une vp non nulle). Comme f et f^2 sont diagonalisables, la multiplicité de toute vp est égale à la dimension de l'espace propre associé qui ici, sont $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$, soit $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2 = \mu(0)$. On utilise alors le résultat immédiat, quasi-cours, $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ pour conclure (je ne le redémontre pas ici).

Remarques

- La réciproque est fautive : Il suffit de considérer une application inversible non diagonalisable (une application inversible vérifie $\text{Ker } f = \{0\} = \text{Ker } f^2$. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Je vous laisse y réfléchir.
- Par contre, on a le résultat f est diagonalisable (dans \mathbb{C}) ssi **pour tout** complexe λ , $\text{Ker}(\lambda \text{Id} - f) = \text{Ker}(\lambda \text{Id} - f)^2$. Un sens est assez difficile à démontrer. L'autre est facile.

3) On ne peut gérer par les dimensions; l'égalité résulte de :

- $\text{Ker}(f - \mu \text{Id}) \cap \text{Ker}(f + \mu \text{Id}) = \{0\}$: c'est du cours sur la réduction : les espaces propres sont en somme directe pour des valeurs propres distinctes (et même orthogonaux pour un endomorphisme symétrique).

Attention ! on a bien $\mu \neq -\mu$ car $\mu^2 = \lambda \neq 0$

- $\text{Ker}(f - \mu \text{Id}) + \text{Ker}(f + \mu \text{Id}) = \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$ par la double inclusion :

- $\text{Ker}(f - \mu \text{Id}) + \text{Ker}(f + \mu \text{Id}) \subset \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$

Soit $x \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id}) + \text{Ker}(f + \mu \text{Id})$, donc $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id})$ et $z \in \text{Ker}(f + \mu \text{Id})$, soit $f(z) = -\mu z$ et $f(y) = \mu y$. Par suite :

$$f^2(x) = f(f(y) + f(z)) = f(-\mu y + \mu z) = -\mu f(y) + \mu f(z) = (-\mu)^2 y + \mu^2 z = \lambda x$$

d'où $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$

- $\text{Ker}(f - \mu \text{Id}) + \text{Ker}(f + \mu \text{Id}) \supset \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$

Analyse : Supposons que $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$ se décompose : $x = y + z$ avec $f(y) = \mu y$ et $f(z) = -\mu z$ puis $f(x) = f(y) + f(z) = \mu y - \mu z$. Ensuite on fait $\lambda L_1 + L_2$ soit $\mu x + f(x) = 2\mu y$, on a trouvé y et $z = x - y$

Synthèse / Démonstration proprement dite :

Soit $x \in \text{Ker}(f^2 - \lambda \text{Id})$, montrons que **la décomposition** sur les deux sevs est (on utilise le y fourni par l'analyse) : $x = \frac{1}{2\mu}(\lambda x + f(x)) + (x - \frac{1}{2\mu}(\lambda x + f(x)))$ **On vérifie :**

- $\frac{1}{2\mu}(\lambda x + f(x)) \in \text{Ker}(f - \mu \text{Id}) :$

$$f\left(\frac{1}{2\mu}(\lambda x + f(x))\right) = \frac{1}{2\mu}(\mu f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{2\mu}(\mu f(x) + \lambda x) = \lambda \left(\frac{1}{2\mu}(f(x) + \mu x)\right)$$
- $(x - \frac{1}{2\mu}(\lambda x + f(x))) = \frac{1}{2\mu}(\mu x - f(x)) \in \text{Ker}(f + \mu \text{Id})$: Procédé analogue.

4) Comme f^2 est inversible, $\det(f^2) = \det(f)^2 \neq 0$. On en déduit (on est dans \mathbb{R}) $\det f \neq 0$ donc f inversible.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les **valeurs propres distinctes** de f^2 . Comme $f^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est diagonalisable, on sait

$$\text{Ker}(f^2 - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f^2 - \lambda_p \text{Id}) = \mathbb{C}^n$$

On applique Q3 car f inversible donc tous les $\lambda_i \neq 0$, et comme on est dans \mathbb{C} , ce sont **tous** des carrés $\lambda_i = \mu_i^2$

$$\text{Ker}(u - \mu_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \mu_1 \text{Id}) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(u - \mu_p \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u + \mu_p \text{Id}) = \mathbb{C}^n$$

On rappelle λ valeur propre de u ssi $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$. Et on comprend que si $\lambda_i = \mu_i^2$ est vp de u^2 , alors μ_i ou $-\mu_i$ est vp de u , pas nécessairement les deux. Par suite, « *stricto-sensu* », tous les noyaux plus haut ne sont pas des espaces propres, mais comme alors ils sont nul (égaux à $\{0\}$ et qu'on a $F \oplus \{0\} = F$, on peut alors conclure que u diagonalisable puisque E est somme directe de ses espaces propres (les noyaux « *nuls* » « *enlevés* »).

5) On a un seul sens à démontrer. On suppose f diagonalisable et $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2$. On reprend la démo précédente et dans la somme des noyaux $\text{Ker}(\lambda_i \text{Id} - f)$ égale à E , on rajoute $\text{Ker} f$ (qui peut être nul). Ensuite on applique aussi Q3 sauf pour $\lambda = 0$. **Mais dans ce cas** on « *remplace* » $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2$. On a donc encore la somme des espaces propres de f^2 égale à \mathbb{C}^n d'où le résultat. Je vous laisse réfléchir à cette preuve volontairement un peu écourtée.

Remarque : Cette équivalence est fautive dans \mathbb{R} , tout simplement parce que tout réel n'est pas toujours le carré d'un réel. On a le résultat suivant : en supposant f^2 diagonalisable (dans \mathbb{R}), alors f diagonalisable (dans \mathbb{R}) ssi $\text{Ker} f = \text{Ker} f^2$ **et en plus** $\text{Sp} f^2 \subset \mathbb{R}^+$. (Si vous avez bien suivi, dans $\text{Sp} f^2$, il n'y a que des carrés mais les carrés des vp complexes, qui n'ont aucune raison d'être positifs!)

III — ALGÈBRE LINÉAIRE

Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle) ✨

ENONCÉ 48 Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 + (-1)^n \det(A) I_n = 0$.

Analyse / Réciproque :

Si $A^2 = (-1)^{n+1} \det(A)I_n$, on passe au déterminant donc $\det(A)^2 = \pm \det(A)^n$ et par réalité, $\det(A) = 0, 1, -1$

- Si $\det A = 0$, alors $A^2 = 0$, A nilpotente d'indice ≤ 2 . Réciproque Ok en incluant le cas $A = 0$ (indice 1).
- Si $\det A \neq 0$ et n impair, alors $A^2 = \det(A)I$ puis $\det(A)^2 = \det(A)^n$ donc $\det(A) = 1$ puis $A^2 = I$, soit A symétrie. En rappelant qu'une symétrie est diagonalisable de vps $1, -1$, que $\det(A) = (-1)^m$, où m est à la fois la multiplicité de -1 et la dimension de $E(-1) = \text{Ker}(-I - A)$, « le parallèlement », **réciproquement**, toute symétrie **parallèlement à un sev de dimension paire** convient (équivalent à par rapport à un sev de dimension impaire).
- Si $\det A \neq 0$ et $n = 2p$ pair, $A^2 = -\det(A)I$ puis $\det(A)^2 = \det(A)^n$ donc $\det(A) = 1$ puis $A^2 = -I$. (Réflexe : on en déduit dimension paire, comme pour toute matrice réelle sans vps réelles, mais on l'a déjà...). les vps complexes sont $\pm i$ de même multiplicité p et donc $\det(A) = (-1)^p$, donc p pair., donc n **multiple de 4**.
Réciproque Ok laissée au lecteur

Mines-Ponts PSI 2023 (étude de 2 sevs de $\mathcal{L}(E, F)$) *

ENONCÉ 53 Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $a, b \in \mathcal{L}(E)$. on pose $D_a = \{a \circ v, v \in \mathcal{L}(E)\}$ et $G_b = \{v \circ b, v \in \mathcal{L}(E)\}$

- 1) Montrez que $D_a = \{f \in \mathcal{L}(E), \text{Im } f \subset \text{Im } a\}$.
- 2) Donnez une relation similaire pour G_b
- 3) Soit $H_{ab} = D_a + G_b$. Donnez sa dimension.
- 4) Quel est le rang maximal d'un élément de H_{ab} ?

1) On pose $V = \{f \in \mathcal{L}(E), \text{Im } f \subset \text{Im } a\}$. $D_a \subset V$ est immédiat puisque si $f = a \circ v$, $\text{Im } f \subset \text{Im } a$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\text{Im } f \subset \text{Im } a$. Construisons v tq $f = a \circ v$. L'idée est « d'inverser » a . Bien sûr, a n'est pas nécessairement inversible. On utilise le théorème du rang version théorique : en notant F un supplémentaire quelconque de $\text{Ker } a$ dans E , a induit un isomorphisme, noté a' , de F sur $\text{Im } a$. On écrit $E = F \oplus \text{Ker } a$.

- Sur $\text{Ker } a$, on prend $v = 0$. On a bien $f = a \circ v$
- Sur F , on prend $v = a'^{-1} \circ f$. Possible car $\text{Im } f \subset \text{Im } a$. on a bien $a \circ v = a' \circ v$, car $\text{Im } v \subset F, = a' \circ a'^{-1} \circ f = f$
 f et $a \circ v$ étant égales sur 2 sevs supplémentaires sont égales partout.

2) La relation est « inversée » : $G_b = \{v \circ b, v \in \mathcal{L}(E)\} = \{f \in \mathcal{L}(E), \text{Ker } f \supset \text{Ker } b\}$

Montrons l'inclusion non immédiate, cad si $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\text{Ker } b \subset \text{Ker } f$, construisons v linéaire tq $f = v \circ b$. On prend 2 supplémentaires G et F vérifiant respectivement $G \oplus \text{Ker } b = E = F \oplus \text{Im } b$. Le théorème du rang nous donne qu'il existe un isomorphisme, noté b' , de G sur $\text{Im } b$. On construit v par :

- Sur F , on prend $v = 0$
- Sur $\text{Im } b$, on prend $v = f \circ b'^{-1}$.

Le lecteur vérifiera de lui-même, proprement, que l'on a bien $f = v \circ b$. **Attention!**, il faut le vérifier **sur** $\text{Ker } b \oplus G$.

3)

Méthode 1

On a $\dim H_{ab} = \dim D_a + \dim G_b - \dim D_a \cap G_b$. On a $\dim D_a = n \operatorname{rg} a$, $\dim G_b = n(n - \dim \operatorname{Ker} b)$ et $\dim D_a \cap G_b = (n - \dim \operatorname{Ker} b) \operatorname{rg} a$. Je vous traite juste ce dernier, les 2 autres ayant une démo similaire.

Soit $f \in D_a \cap G_b$, cad $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b \subset \operatorname{Ker} f$. Prenons B un supplémentaire de $\operatorname{Ker} b$ dans E , $B \oplus \operatorname{Ker} b = E$. Considérons l'application φ qui à f associe l'application f' , égale à f , mais co-restreinte, au départ à B et à l'arrivée à $\operatorname{Im} a$. On a $f' \in \mathcal{L}(B, \operatorname{Im} a)$, $\dim B = n - \dim \operatorname{Ker} b$, $\dim \operatorname{Im} a = \operatorname{rg} a$. φ est bijective, donc un isomorphisme, car la réciproque est l'application qui à $g \in \mathcal{L}(B, \operatorname{Im} a)$ associe l'application de $E = B \oplus \operatorname{Ker} b$ sur E définie par g sur B et 0 sur $\operatorname{Ker} b$. Je vous laisse vérifier qu'elle convient. Le résultat suit.

$$\dim H_a = n \operatorname{rg} a + n(n - \dim \operatorname{Ker} b) - (n - \dim \operatorname{Ker} b) \operatorname{rg} a = n^2 - \dim \operatorname{Ker} b(n - \operatorname{rg} a)$$

Méthode 2

Via la une base \mathcal{E} au départ adaptée à la décomposition $\operatorname{Ker} b \oplus B = E$ et une base \mathcal{F} à l'arrivée à la décomposition $\operatorname{Im} a \oplus F = E$, Les éléments g de D_a (rp. h de G_b) ont de la base \mathcal{E} vers la base \mathcal{F} une matrice du type :

$$g: \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h: \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g+h: \begin{pmatrix} A & B+C \\ 0 & D \end{pmatrix} = M$$

Je vous laisse y réfléchir. **Attention!** ces blocs n'ont aucune raison d'être carrés! Par exemple, $A \in \mathcal{M}_{\operatorname{rg} a, \dim \operatorname{Ker} b}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n - \operatorname{rg} a, n - \dim \operatorname{Ker} b}(\mathbb{K})$. La dimension recherchée est le nombre d'indéterminées de cette matrice (je ne m'attarde pas sur une démo et je vous laisse y réfléchir) soit :

$$\operatorname{rg} a \dim \operatorname{Ker} b + \operatorname{rg} a(n - \dim \operatorname{Ker} b) + (n - \operatorname{rg} a)(n - \dim \operatorname{Ker} b) = n^2 - \dim \operatorname{Ker} b(n - \operatorname{rg} a)$$

4) Rappelons que rang maximum signifie que la valeur peut être « atteinte ». On note $r = \operatorname{rg} A$ et $k = \dim \operatorname{Ker} b$ et usuellement $J_{r,m,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{K})$ constituée de 0 et que de 1 sur la « diagonale » issue de la position (1, 1), qui d'ailleurs n'est **pas** stricto-sensu une diagonale lorsque $m \neq l$.

On reprend la méthode 2 et les matrices $M = \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{r,k}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,n-k}(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_{r,n-k}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$ puisque $\operatorname{Im}(u+v) = \{(u+v)(x), x \in E\} \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \{u(x) + v(y), x, y \in E\}$

- si $r \leq k$, $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\operatorname{rg} M \leq \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & D \end{pmatrix} \leq r + n - k$.

En considérant $M = \begin{pmatrix} J_{r,r,k} & 0 \\ 0 & J_{n-k,n-r,n-k} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{array} \right)$, ce rang est « atteint ».

- si $r \geq k$, le rang n est atteint en I_n ! Regardez le dessin pour comprendre que c'est bien une matrice du type

de M :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

CCINP 2023 🐼 | Mines-Ponts 2013 PSI | Centrale 2007 PSI | TPE PSI 2006 | Mines-Ponts PC 2015 (dimension d'un sev de $\mathcal{L}(E, F)$)

ENONCÉ 54 Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E . Montrez que $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \text{Ker } u\}$ est sous-espace de $\mathcal{L}(E, F)$. Donnez sa dimension.

Attention ! ce ne sont pas des endomorphismes ici! Le plus simple est sans doute d'utiliser la caractérisation usuelle d'un sev :

- A contient l'application nulle $u = 0$ car cette application a pour noyau $\text{Ker } u = E$ qui contient trivialement G .
- **Stabilité par + et .** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $u, v \in A$. Montrons $w = \lambda u + \beta v \in A$. Soit $x \in G$, alors $w(x) = \alpha u(x) + \beta v(x) = 0$. Ok. On a démontré $G \subset \text{Ker } w$.

Pour trouver la dimension c'est un peu plus difficile, surtout si on veut raisonner avec les morphismes : il faut construire un isomorphisme avec un ev de dimension connue. Soit H un supplémentaire de G dans E , on peut prouver que A est isomorphe à l'ev des applications linéaires de $\mathcal{L}(H)F$, donc de dimension $\dim H \times \dim F = (\dim E - \dim G) \times \dim F$. Mais on va procéder un peu plus simplement en utilisant les matrices.

Reprenons $G \oplus H = E$. On pose $\dim E = n, \dim F = p$ et $\dim G = q$. Considérons une base adaptée à cette décomposition en somme directe (cette notion est dans le cours : réunion de 2 bases dans l'ordre). Alors $u \in A$ ssi la matrice dans cette base est par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (je vous laisse y réfléchir, **Attention !** aux tailles, il n'y a qu'une ligne **car je n'ai pas** « coupé » F). On a $M \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{K})$. Etant donné le ssi, le fait que M est **quelconque**, la dimension est le nombre de coefficients indépendants de M , donc tous, soit $p(n - q) = \dim F \times (\dim E - \dim G)$.

IV — ALGÈBRE EUCLIDIENNE

CCINP PSI 2023 (caractérisation projection orthogonale) 🐼

ENONCÉ 63 Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E .
1) Soient $y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Développez $\|x + \lambda y\|^2$.
2) Montrez que p est un projecteur orthogonal ssi $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

1) C'est une question de cours!

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \|\lambda y\|^2 + 2(x | \lambda y) = \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda(x | y) + \|x\|^2$$

Il manque sûrement une question dans cet (report de) énoncé car je ne vois pas à quoi sert le λ . Il doit bien servir à quelque chose plus loin ...

2) Là-aussi, c'est quasiment une question de cours. Si p est le projecteur orthogonal sur F , je rappelle qu'on utilise alors $F \oplus F^\perp = E$ et que $x \in E$ se décomposant en $x = f + g$, avec $f \in F$, $g \in F^\perp$, donc $f \perp g$. On sait, par définition, $p(x) = f$.

$$\|x\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \geq \|f\|^2$$

On a utilisé le théorème de Pythagore car $f \perp g$. On termine, en passant à la racine, qui est croissante et conserve l'inégalité, donc $\|f\| = \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Remarque : Je rappelle qu'il y a même une réciproque (qui n'est pas dans le cours) : si p est une projection et vérifie cette inégalité **pour tout** x , c'est une projection orthogonale. Ou autrement dit, par la contraposée, pour une projection **non** orthogonale, il existe (au moins) un vecteur qui a une projection **strictement plus grande** (en norme).

Centrale PSI 2023 (matrice antisymétrique 3×3)

ÉNONCÉ 65 On munit \mathbb{R}^3 de sa structure euclidienne canonique. Soient $u = (a, b, c)^T$ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 . On note $D = \text{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D .

1) Exprimez $p(v)$ pour tout vecteur $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$

2) Exprimez $f \circ f$ en fonction de p .

3) Déterminez $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. Montrez qu'ils sont supplémentaires orthogonaux.

4) Montrez $f^3 = -f$.

1) (u) étant une BON de D (car il est unitaire), on applique la formule $p(v) = (v | u) u$

Remarque :

On peut en déduire immédiatement la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 qui est $P = \begin{pmatrix} aa & ba & ca \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{pmatrix}$

J'en profite pour rappeler qu'il est normal que P soit symétrique car p , projection orthogonale, est un endomorphisme symétrique (et la base canonique ici est orthonormée).

2)

Méthode 1 : On calcule matriciellement $M^2 = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ba & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ Cette matrice est symétrique, ce qui était attendu, puisque le carré de toute matrice antisymétrique est une matrice symétrique (et même symé-

trique négative) car $(M^2)^T = (M^T)^2 = (-M)^2 = M^2$. Si on a pris la peine d'écrire la matrice plus haut on reconnaît aisément la matrice $P - (a^2 + b^2 + c^2)I_3 = P - I_3$. On reconnaît alors la (matrice de) « moins » la projection orthogonale sur le plan $D^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$ (qu'on note $-q$).

Méthode 2 : Il peut-être utile de se rappeler que *toute* matrice antisymétrique 3×3 est canoniquement associée à $x \rightarrow \omega \wedge x$ (en munissant \mathbb{R}^3 d'une structure euclidienne orientée canonique : écrivez $x \rightarrow \omega \wedge x$ matriciellement et vous verrez). Ici, le f associé à M est $x \rightarrow u \wedge x$ d'où, pour f^2 , on applique le double-produit vectoriel (si on le connaît...)

$$(f \circ f)(x) = u \wedge (u \wedge x) = (u|x)u - (u|u)x = (p - \text{Id})(x)$$

3) On peut se rappeler que tout endomorphisme symétrique a un noyau et une image orthogonaux (et *donc* supplémentaires orthogonaux par le théorème du rang). Pour un endomorphisme antisymétrique, c'est identique et la démo est exactement la même : si $x \in \text{Im } f, y \in \text{Ker } f, x = f(z), f(y) = 0$ puis :

$$(x|y) = (f(z)|y) = -(z|f(y)) = 0$$

Par la méthode 2, on a immédiatement $\text{Ker } f = \text{Vect}(u)$. Par la méthode 1, on peut résoudre le système 3×3 associé à la matrice M et on trouve facilement $\text{Vect}(a, b, c)$ (je ne mets pas les détails). Un peu plus finement, on peut aussi utiliser f^2 , colinéaire à la projection, soit $\text{Ker } f^2 = \text{Vect}(u)$, puis l'inclusion $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. Cette inclusion ne pouvant être stricte, car $\text{Ker } f \neq \{0\}$, il y a égalité. On termine avec $\text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$.

Remarque : Je rappelle (ce n'est pas du cours) que la seule valeur propre *réelle possible* d'une matrice antisymétrique est 0. Les autres sont conjuguées 2 à 2 (et même imaginaires pures ce qui explique que le carré soit une matrice symétrique négative). Bref, une matrice antisymétrique de taille impaire a nécessairement un noyau non nul, comme ici.

4) $f^3 = (p - \text{Id}) \circ f = -f$ car $\text{Im } f = D^\perp = \text{Ker } p$ amène $p \circ f = 0$.

CCINP PSI 2023 🐼 (produit scalaire intégral)

ENONCÉ 71 Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. On pose $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

1) Montrez que φ est un produit scalaire.

2) Montrez qu'il existe une unique fonction g qui est C^2 sur $[a, b]$ tq $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$. Montrez que $\int_a^b f(t)g(t) dt = -\int_a^b (g'(t))^2 dt$.

3) Déterminez l'orthogonal du sev F de l'ensemble des fonctions C^2 sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1) Commençons par remarquer que l'intégrale existe par continuité de fg sur le segment $[a, b]$. φ est à valeurs dans \mathbb{R} , donc une forme car :

- Symétrique : immédiat.
- Linéaire à gauche par linéarité de l'intégration puis linéaire à droite par symétrie donc bilinéaire.
- positive car $\varphi(f, f) = \int_a^b f^2 \geq 0$ car f^2 est un carré réel.
- définie : si $\varphi(f, f) = \int_a^b f^2 = 0$, comme l'intégrande est *continue et positive*, un théorème nous amène la nullité de f^2 puis de f sur $[a, b]$

2) Comme f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ elle y admet une primitive (cours), puis une primitive de primitive, soit un $h(x)$ tq $h''(x) = f(x)$. h sera alors C^2 . Il est immédiat que les $g(x) = h(x) + \lambda x + \mu$ vérifieront cette même propriété. Un choix adapté de λ et μ (il suffit de résoudre un système 2×2 que je ne fais pas ici) permettra de vérifier en plus $g(a) = g(b) = 0$

On effectue alors une IPP avec $u' = f = g'' \quad v = g \quad u = g' \quad v' = g'$:

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b g''(t)g(t) dt = \left[g(t)g'(t) \right]_a^b - \int_a^b g'(t)g'(t) dt = - \int_a^b (g'(t))^2 dt$$

3) Il faut utiliser la question précédente, en n'oubliant pas qu'elle s'écrit aussi $(f|g) = -\|g'\|^2$. On procède par analyse-synthèse pour trouver l'orthogonal de F .

Analyse :

Soit $f \in F^\perp$. Alors $\forall h \in F, (f|h) = 0$. on utilise Q2 en considérant ce g et en prenant en particulier $h = g$. Il suit, en particulier, $-\|g'\|^2 = 0$, donc $g' = 0$, puis $g'' = f = 0$.

Synthèse :

Réciproque immédiate : $F^\perp = \{0\}$

Remarques

- Ceci n'est pas possible dans un ev de dimension finie (cad un ev euclidien) car $F^\perp = \{0\} \iff F = E$. C'est du cours (par la dimension).
- Il y a une démo plus subtile (mais pas plus courte) mais qui dépasse le cadre d'une simple PSI, niveau X-ENS. Je vous l'explique néanmoins, pour les élèves « ambitieux » : on utilise les evns (un ev préhilbertien de dimension infinie, comme ici, est un evn, muni de sa norme euclidienne). Elle utilise deux résultats : $F^\perp = \overline{F}^\perp$ et le théorème de Stone-Weierstraß, que vous avez peut-être vu en MPSI? (en tous cas, au programme de MP). qui affirme que les (l'ensemble des) polynômes sont **denses** dans les fonctions continues pour la norme-infinie sur un segment $[a, b]$ (ou si vous voulez, équivalence de la densité au programme de PSI d'ailleurs, caractérisation séquentielle, il existe une suite de fonctions-polynômes convergeant vers n'importe quelle fonction continue **pour la norme sup sur** $[a, b]$).

$F \subset \overline{F}$ donc $F^\perp \supset \overline{F}^\perp$. On peut utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence (au programme PSI). Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $f \in F, (f|x) = 0$. Si $f' \in \overline{F}, f' = \lim f_n$ avec $f_n \in F$. On a $(f_n|x) = 0$. L'application $f \rightarrow (f|x)$ étant continue (car 1-lipschitzienne, c'est du cours), on peut passer à la limite et on a bien $(f'|x) = 0$, soit $x \in \overline{F}^\perp$.

On remarque $\|f\|^2 = \int_a^b f^2 \leq (b-a)\|f\|_\infty^2$. on en déduit la densité des polynômes pour la norme euclidienne de l'énoncé. Pour cette norme (cet evn), on a donc $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$, puis comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, par suite, $\mathbb{R}[X]^\perp = \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})^\perp = \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})^\perp = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})^\perp = \{0\}$. Vous avez suivi? Bravo!

ENONCÉ 74 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. Soient $F = \{f \in E, \forall x \in [0, 1], f(x) = 0\}$ et $G = \{f \in E, \forall x \in [-1, 0], f(x) = 0\}$

- 1) Montrez que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E
- 2) Montrez que F et G sont en somme directe orthogonale. Sont-ils supplémentaires?
- 3) Justifiez que $G \subset F^\perp$, puis que $G = F^\perp$. [2019 : Indic. : pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = 0$ si $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = g(0)$ si $x \in [-1, -\frac{1}{n}]$ et $f_n(x)$ affine sur $[-\frac{1}{n}, 0]$; calculez $(f_n|g)$ et montrez que $g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = 0$. On choisit f nulle sur $[0, 1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$; montrez que $g \in G$ et conclure.]

1) A noter que c'est un produit scalaire usuel, cad du cours. Néanmoins on le redémontre rapidement. forme bilinéaire symétrique est immédiat.

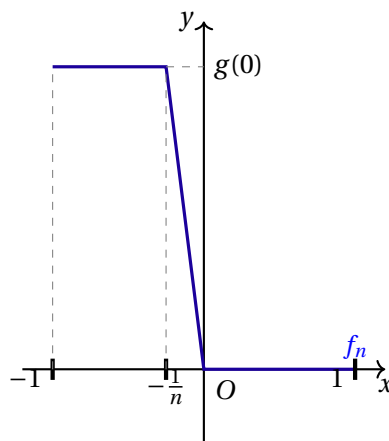
- **positive** : Si $f \in E, (f|f) = \int_{-1}^1 f^2 \geq 0$ car f est positive (valeurs réelles) et les 2 bornes sont bien ordonnées.
- **définie** : Si $f \in E$ vérifie $(f|f) = \int_{-1}^1 f^2 = 0$, et, par positivité de la fonction-intégrande et **continuité** de f^2 , il résulte $f^2 = 0$, donc $f = 0$ sur $[-1, 1]$

2) Rappelons que si 2 sevs sont orthogonaux, ils sont en somme directe, c'est du cours. $F \perp G$ car :

$$\forall f \in F, g \in G, (f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^0 \underbrace{f(t)}_{0 \text{ sur } [-1,0]} \underbrace{g(t)}_{0 \text{ sur } [-1,0]} dt + \int_0^1 \underbrace{f(t)}_{0 \text{ sur } [0,1]} g(t) dt = 0 + 0 = 0$$

Dans un ev de **dimension finie**, 2 sevs F et G orthogonaux sont supplémentaires ssi $\dim F + \dim G = n$. Ici, on est en dimension infinie, donc on ne peut rien dire, à priori, d'autant plus que la question suivante va y répondre.

3) Comme $G \perp F$, on sait $G \subset F^\perp$ (et d'ailleurs aussi $F \subset G^\perp$). Pour montrer $G = F^\perp$, il faut et il suffit d'établir l'inclusion $F^\perp \subset G$. Soit $g \in F^\perp$, montrons $g \in G$ en nous servant de l'indication de l'énoncé : une suite de fonctions f_n , adaptée à g , que je dessine pour une meilleure lisibilité.



On a $f_n \in F$, donc $(f_n|g) = 0$. Or :

$$(f_n|g) = \int_{-1}^1 f_n(t)g(t) dt = \int_{-1}^{-1/n} g(0)g(t) dt + \int_{-1/n}^0 -ng(0)t g(t) dt + \int_0^1 0 = g(0) \int_{-1}^{-1/n} g - ng(0) \int_{-1/n}^0 t g(t) dt$$

On a $\int_{-1}^{-1/n} g \rightarrow \int_{-1}^0 g$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, par le théorème fondamental de l'analyse, parce que $x \rightarrow \int_{-1}^x g$ est continue (et même C^1) sur $[-1, 1]$, car g **continue** (on peut donc remplacer la limite dans la borne)

Pour la 2^e intégrale, on écrit, avec $\|g\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |g(t)|$ qui existe, car g **continue** sur le segment $[-1, 1]$ y est

bornée :

$$0 \leq \left| n g(0) \int_{-1/n}^0 t g(t) dt \right| \leq n \|g\|_\infty \int_{-1/n}^0 |t g(t)| dt \leq n \|g\|_\infty^2 \int_{-1/n}^0 t dt = n \|g\|_\infty^2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1/n}^0 = n \|g\|_\infty^2 \frac{1}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit $0 = (f_n | g) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt$, cette dernière intégrale vaut donc 0. On choisit alors f comme dans l'énoncé : f nulle sur $[0, 1]$ et égale à $g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$. Elle est bien **continue**, il faut regarder au recollement en 0, on a bien $g(0) - g(0) = 0$ et on a $f \in F$. Par suite :

$$0 = (f | g) = \int_{-1}^2 f(t) g(t) dt = \int_{-1}^0 (g(t) - g(0)) g(t) dt = \int_{-1}^0 g^2(t) dt - g(0) \int_{-1}^0 g(t) dt = \int_{-1}^0 g^2(t) dt$$

Cette dernière intégrale étant nulle, par positivité et continuité de g^2 , on en déduit g nulle sur $[-1, 0]$, donc $g \in F$.

Remarque : On a donc $G = F^\perp$ et, par « symétrie des données », $F = G^\perp$ qui amène $(G^\perp)^\perp = F^\perp = G$. C'est vrai ici, mais ce n'est pas toujours vrai en dimension infinie. $(F^\perp)^\perp = F$ et $F \oplus F^\perp = E$ ne sont **pas toujours vrais** en dimension infinie.

A t-on ici $F \oplus F^\perp (= F \oplus G) = E$? Autrement dit, toute fonction continue sur $[-1, 1]$ peut-elle se décomposer en la **somme de 2 fonctions continues**, l'une nulle sur $[-1, 0]$, l'autre nulle sur $[0, 1]$? **Non!** (je vous laisse réfléchir pourquoi, en vous indiquant juste qu'il faut regarder en 0)

CCINP PSI 2023 -2022 | Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphismes de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) *

ÉNONCÉ 76 Soient E un espace euclidien et $u \in S(E)$.

- 1) Montrez $\forall x \neq 0, (u(x) | x) > 0 \iff \text{Sp } u \subset \mathbb{R}^{+*}$. Un endo. symétrique vérifiant ces conditions est dit défini positif. [Mines : Question absente]. On note alors $s \in S^{++}(E)$
- 2) Si a et b sont 2 endo. symétriques de $S^{++}(E)$, montrez il existe un unique $c \in \mathcal{L}(E)$ tq $b = a \circ c + c \circ a$.
- 3) Montrez que c est symétrique défini positif.
- 4) [Mines : On prend $n = 2$. Montrez il existe $c, a \in S^{++}(E)$ avec $a \circ c + c \circ a$ à spectre non inclus dans \mathbb{R}^{+*} .]

A REVOIR CAR GROSSE ERREUR

1) Une question de cours qui tombe souvent... Je vous la retraite par les endomorphismes. Dans le cours elle est traitée par les matrices, sans doute un peu plus facile. u est un endomorphisme symétrique.

Par hypothèse, pour tout vecteur $x \neq 0, (u(x) | x) > 0$. En prenant, **en particulier** un vecteur propre $x \neq 0$ associé à une valeur propre λ quelconque, il vient : $(u(x) | x) = (\lambda x | x) = \lambda \|x\|^2 > 0$ et **comme** $\|x\| \neq 0$, il suit $\lambda > 0$.

Si u possède des vp toutes > 0 . Par théorème spectral, il existe une BON de vecteur propres (e_i) vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Ensuite pour un vecteur **quelconque** x de coordonnées x_i ($x_i = (e_i | x)$ c'est du cours) :

$$(u(x) | x) = \left(u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \middle| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \middle| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i x_i x_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

On a utilisé BON qui se traduit par $(e_i | e_j) = \delta_{ij}$. Cette somme est positive car les x_i^2 le sont par « réalité ». Elle est même strictement positive pour $x \neq 0$ car sa nullité impose (comme $\lambda_i > 0$) tous $x_i = 0$, soit $x = 0$.

2) C'est une question difficile. On raisonne matriciellement. Par hypothèse $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Quand on a la question : montrez il existe un unique..., il faut d'abord penser à prouver bijection. On considère donc (regardez le lien avec la question) l'application $\varphi : M \rightarrow AM + MA$ clairement endomorphisme de l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche son noyau.

Si $AM + MA = 0$, $AM = -MA$ donc M anti-commute avec A . Comme lorsque les matrices commutent (je ne refais pas la démo ici, c'est du cours), les espaces propres $E_A(\lambda)$ de A sont stables par M . Si on co-restreint (endomorphisme induits) à ce sev, a est l'homothétie de rapport λ (je vous laisse y réfléchir), et alors cela s'écrit $\lambda \text{Id} \circ m_\lambda = -m_\lambda \circ \lambda \text{Id}$, soit $m_\lambda = 0$. L'endomorphisme m est donc nul sur $E_A(\lambda)$ (A REVOIR SAUF SI $\lambda = 0$) et comme la matrice A est diagonalisable, la somme directe des $E_A(\lambda)$, pour λ parcourant le spectre de A , vaut E , et donc $m = 0$, ou $M = 0$, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. On en déduit que l'application φ est bijective d'où le résultat de l'énoncé sur l'existence et l'unicité de c endomorphisme.

Remarque : On peut noter que l'hypothèse U symétrique ne sert pas ici, ni A symétrique non plus, seulement A diagonalisable est utile.

3) il faut constater que si $\varphi(C) = B$, en se servant ici de A et B symétriques :

$$\varphi(C^T) = AC^T + C^T A = (CA^T + A^T C)^T = (CA + AC)^T = B^T = B = \varphi(C)$$

Par unicité, on en déduit $C^T = C$, soit C symétrique

Remarque : Il est probable que si l'élève réussit à traiter cet exercice, le correcteur lui donne en plus l'hypothèse **défini positif** à traiter, comme en 2022. Traitons-le, c'est un peu plus difficile, c'est pour cela que l'examineur a du le supprimer en 2023 et le mettre en question subsidiaire.. On suppose donc $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On applique le théorème spectral à $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $S = PDP^T$ avec D diagonale et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$B = AC + CA \iff B = APDP^T + PDP^T A \iff P^T B P = P^T A P D + D P^T A P \iff B' = A' D + D A'$$

Je rappelle que multiplier une matrice **quelconque** à gauche (rp. à droite) par une matrice diagonale (de coefficients λ_i), revient à multiplier la i -ième ligne (rp. colonne) par λ_i . L'équation plus haut s'écrit, en regardant seulement le i -ième coefficient diagonal, $b'_{ii} = 2\lambda_i a_{ii}$. Comme $a'_{ii}, b'_{ii} > 0$, il suit $\lambda_i > 0$, soit $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Je détaille un peu plus : $A' = P^T A P$ est clairement symétrique et comme ses vp sont celles de A (A et A' sont semblables). On a donc $A' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Idem $B' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a vu en exo que les coefficients **diagonaux** d'une matrice symétrique définie positive sont tous > 0 . Il suffit de remarquer $a'_{ii} = E_i^T A' E_i > 0$, avec E_i i -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

CCINP PSI 2023 🐼 | Mines-Ponts PSI 2014 (produit scalaire intégral) ✨

ENONCÉ 78 Soit $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\varphi(f, g) = \int_0^1 f g + f' g'$.

1) Montrez φ produit scalaire sur E .

2) Soient $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$.

Montrez qu'ils sont en somme directe et orthogonaux [Mines : Montrez supplémentaires orthogonaux.]

Paul ne se rappelle plus les 2 autres questions. Probablement celles-là :

3) Montrez que V est l'orthogonal de W [Mines : C'est la question précédente]

4) Déterminez la projection orthogonale sur V de $f \in E$.

1) Commençons par remarquer que l'**intégrale existe** puisque $t \rightarrow f(t)g(t) + f'(t)g'(t)$ est bien **continue** sur le segment (fermé) $[0, 1]$, par hypothèse. φ est bien un forme à valeur réelles.

- La symétrie est immédiate
- La linéarité à gauche résulte de la linéarité de l'intégration puis la symétrie amène la linéarité à droite, soit la bilinéarité de φ .
- La **positivité** également puisque les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} , où un **carré est positif** : $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2 + f'^2 \geq 0$.
- Quant à **définie**, puisque la fonction dans l'intégrale nulle $\varphi(f, f) = 0$, est **continue** et de **signe constant** sur $[0,1]$, un théorème permet de conclure que $f^2(t) + f'^2(t) = 0$. Comme on est dans \mathbb{R} , il vient f nulle sur $[0,1]$.

Remarque : On peut remarquer que \mathcal{C}^1 suffit pour démontrer produit scalaire. L'hypothèse est plus forte.

2) Notons que l'on sait grâce au cours sur les équations différentielles d'ordre 2 (le coefficient « dominant » d'ailleurs est $1 \neq 0$ sur \mathbb{R}), que W est un ev de dimension 2, cad un **plan**. Par résolution immédiate (c'est du cours), on a $W = \text{Vect}(x \rightarrow e^x, x \rightarrow e^{-x}) = \text{Vect}(x \rightarrow \cosh x, x \rightarrow \sinh x)$.

Rappelons que l'on sait que le noyau d'une forme linéaire (cad à valeurs dans \mathbb{R}) non nulle est un hyperplan (même en dimension infinie, mais alors on ne peut pas dire de dimension $n - 1$, et ce n'est pas au programme). Il subsiste quand même que c'est **un sev** de E . L'application $f \in E \rightarrow f(a) \in \mathbb{R}$ étant clairement une **forme linéaire non nulle** sur E , son noyau H_a est un sev (hyperplan) de E . On a $V = H_0 \cap H_1$, donc V est bien **un sev** de E .

Il reste à démontrer orthogonaux et en somme directe. On se rappelle son cours : si 2 sevs sont orthogonaux, ils sont en somme directe... Soient $f \in V$ et $g \in W$, cad $f(0) = f(1) = 0$ et $g'' = g$. Utilisons une IPP : $u' = f' \quad v = g' \quad u = f \quad v' = g''$

$$\int_0^1 f' g' = [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t) dt = - \int_0^1 f g$$

On a donc immédiatement $\varphi(f, g) = 0$ cad $f \perp g$, puis $V \perp W$

Remarque : Aux mines, on demandait de démontrer directement, **en plus**, $V \oplus W = E$. C'est plus fort et plus dur mais de toute façon c'est la question d'après dans CCINP. On rappelle qu'en dimension finie, pour démontrer F et G **supplémentaires orthogonaux**, il faut et il suffit de démontrer $F = G^\perp$ ou $G = F^\perp$, mais ce n'est pas toujours très « pratique ». Il est plus simple de démontrer $F \perp G$ et $\dim F = n - \dim G$. Comme E est de dimension infinie, on ne peut utiliser cette égalité sur les dimensions, par conséquent pour démontrer V et W **supplémentaires orthogonaux**, il **faudrait et il suffirait** de démontrer $V + W = E$ et $V \perp W$.

3) Selon la remarque on démontre $V + W = E$ c'est le plus simple. On pourrait aussi démontrer $V = W^\perp$ par les inclusions.

Analyse : Soit $h \in \mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ tel que $h = f + g$ avec $f(0) = f(1) = 0$ et $g'' = g$. Il vient $h(0) = g(0)$ $h(1) = g(1)$ et par double dérivation, il suit $h'' = f'' + g$ soit $f'' - f = h'' - h$ ou autrement dit f solution de $y'' - y = h'' - h$ aux conditions initiales $f(0) = f(1) = 0$. La résolution de l'équation homogène est $y = \alpha \cosh x + \beta \sinh x$. Une solution particulière est h , d'où la solution générale est $f(x) = \alpha \cosh x + \beta \sinh x + h(x)$. On trouve les 2 constantes par les

conditions initiales :

$$\begin{cases} \alpha + h(0) & = 0 \\ \alpha \cosh 1 + \beta \sinh 1 + h(1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = -h(0) \\ \beta & = \frac{1}{\sinh 1} (-h(1) + h(0) \cosh 1) \end{cases}$$

L'analyse est terminée puisque nécessairement $g(x) = h(x) - f(x)$.

Synthèse : Soit $h \in \mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Posons $f(x) = \alpha \cosh x + \beta \sinh x + h(x)$ avec α et β comme plus haut et $g(x) = h(x) - f(x)$. On a bien

- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $g \in W$, puisque $g \in \text{Vect}(\cosh x, \sinh x)$.
- $f \in V$ car $f(0) = \alpha + h(0) = 0$ et $f(1) = \alpha \cosh 1 + \beta \sinh 1 + h(1) = 0$.

4) Si on maîtrise son cours sur les projections, la projection orthogonale de f sur V est le décomposé sur la somme

directe $V \oplus V^\perp = E$, et on l'a traité plus haut, c'est $p_V(f) = -f(0) \cosh x + \frac{1}{\sinh 1} (-f(1) + f(0) \cosh 1) \sinh x + f(x)$

IMT PSI 2023 (matrice projection orthogonale)

ENONCÉ 79 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une BON de \mathbb{R}^4 et H le sev engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$

- 1) Construire une base orthogonale de H .
- 2) Donnez la matrice dans la base \mathcal{B} de la projection orthogonale sur H .
- 3) Calculez $\inf_{x \in H} \|x - e_1\|$

1) Le principe pour construire une base orthogonale est d'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, mais pour la dimension 2 on peut s'en passer. On procède comme ci : on prend $a' = a$ et $b' = b + \lambda a$ en choisissant λ pour que $b' \perp a' = a$. On applique dans le calcul que la base (e_i) est orthonormée soit $(e_i | e_j) = \delta_{ij}$ et on utilise, bien sûr, la bilinéarité du produit scalaire :

$$(b' | a') = ((1 + \lambda)e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3 - e_4 | e_1 + e_2 + e_3) = (1 + \lambda)(e_1 | e_1) + \lambda(e_2 | e_2) + \lambda(e_3 | e_3) = 1 + 3\lambda \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

On trouve $b' = \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4$

2) On applique la formule de la projection orthogonale avec $(\frac{a'}{\|a'\|}, \frac{b'}{\|b'\|})$ BON de H . On calcule en préambule $\|a'\|^2 = \|e_1 + e_2 + e_3\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2$ (par pythagore), soit $\|a'\|^2 = 3$ et de même $\|b'\|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{5}{3}$.

Pour tout vecteur x de \mathbb{R}^4 :

$$p(x) = \frac{1}{\|a'\|^2} (a' | x) a' + \frac{1}{\|b'\|^2} (b' | x) b' = \frac{1}{3} (a' | x) a' + \frac{1}{2} (b' | x) b'$$

Pour chacun des 4 vecteurs de la base canonique :

$$\begin{aligned}
 p(e_1) &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3 | e_1)(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4 | e_1\right)\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) \\
 &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{3}{5}e_1 + \frac{1}{5}e_2 + \frac{1}{5}e_3 - \frac{2}{5}e_4 \\
 p(e_2) &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 + \frac{2}{5}e_3 + \frac{1}{5}e_4 \\
 p(e_3) &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 + \frac{2}{5}e_3 + \frac{1}{5}e_4 \\
 p(e_4) &= -\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = -\frac{2}{5}e_1 + \frac{1}{5}e_2 + \frac{1}{5}e_3 + \frac{3}{5}e_4
 \end{aligned}$$

Je n'ai mis tous les détails que pour le premier e_1 . On met ensuite les coordonnées en colonnes comme vous savez certainement. On peut éviter certains calculs en se rappelant que la matrice va être symétrique puisque matrice **dans** une BON d'un endomorphisme symétrique (les projections et symétries **orthogonales**). Cela ne fait que 10 coeffs à calculer au lieu de 16. Cela évite aussi de faire des erreurs : si la matrice n'est pas symétrique, il y a des erreurs de calcul... Utile (de même que $P^2 = P$) j'ai moi-même effectué plusieurs erreurs de calcul... Pfo... La matrice recherchée est :

$$P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Il faut reconnaître la distance à un sev pour appliquer le théorème du cours : on reconnaît $d(e_1, H)$. Le cours nous donne alors :

$$d^2(e_1, H) = \|e_1\|^2 - \|p(e_1)\|^2 = 1 - \frac{1}{25}(9 + 1 + 1 + 4) = \frac{10}{25} \implies \inf_{x \in H} \|x - e_1\| = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

V — SÉRIES : CONVERGENCE, CALCUL DE SOMMES ET DE RAYONS DE CONVERGENCE

Mines-Ponts PSI 2023 | Petites Mines PSI 2013 (autour de séries alternées) *

ENONCÉ 85 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k}$ et $T_n = S_n + S_{n+1}$.

1) Montrez $S_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sqrt{n}$.

2) Montrez que T_n admet une limite finie et que celle-ci est positive.

1) [2013 : Nature de $\sum (T_{n+1} - T_n)$]

2) [2013 : En déduire que (T_n) converge vers une limite $\ell < 0$ puis que $S_n \sim (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{2}$.]

3) [2013 : Nature de la série $\sum \frac{1}{S_n}$?]

1) On calcule $t_{n+1} - t_n = s_{n+2} - s_n = (-1)^{n+2} \sqrt{n+2} + (-1)^{n+1} \sqrt{n+1} = (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$.

Comme $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \geq 0$, c'est donc une série **alternée**. Pour prouver la convergence le premier réflexe est d'essayer le CSSA et, notamment, de regarder si elle (**sa valeur absolue**) décroît. On choisit la méthode de la déri-

vation :

$$\frac{d}{dn}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \frac{1}{2\sqrt{n+2}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}} \leq 0$$

Reste à prouver $\rightarrow 0$. Un petit dl suffira :

$$(-1)^n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = (-1)^n\left(\sqrt{n}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}\right) = (-1)^n\sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \sim \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

2) On aura remarqué le télescopage des termes : $S_n = \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1$. Comme Q1 a établi la convergence de la série $\sum (t_{n+1} - t_n)$, cela entraîne (équivalent) la convergence de la suites des somme partielles S_n . On en déduit que la suite (t_n) converge et vers $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} (t_{k+1} - t_k) + t_1$. On a $t_1 = -2 + \sqrt{2} < 0$.

Quant à la somme infinie de la série alternée $\sum t_{n+1} - t_n$, **comme** elle vérifie le CSSA, le cours nous apprend qu'elle est du signe du premier terme, soit $t_2 - t_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{2} < 0$. Je vous rappelle qu'on a même un encadrement plus précis, si besoin est, par les sommes partielles (d'indice) paires et impaires.

On a donc démontré $t_n = s_{n+1} + s_n \rightarrow \ell$ soit encore, comme $s_{n+1} = s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1}$, que $2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} \rightarrow \ell$ ce qui s'écrit encore $2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} = \ell + o(1)$ puis $2s_n = (-1)^n\sqrt{n+1} + o(\sqrt{n})$. Finalement $2s_n \sim (-1)^n\sqrt{n+1} \sim (-1)^n\sqrt{n}$. On a bien le résultat de l'énoncé.

Remarques

- Je rappelle le résultat général, utilisé plus haut, que je ne redémontre pas ici, la **série** $\sum u_n - u_{n-1}$ converge **ssi** la **suite** (u_n) converge. Il sert surtout dans le sens droite-gauche, pour prouver qu'une suite converge, car il n'y a pas beaucoup de critères de convergence pour le suites (à votre programme, il n'y a guère que « *croissant majoré* » ou « *décroissant minoré* »).
- Comme cela sert à la question d'après, je reprends $2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} = \ell + o(1)$ en le développant :

$$2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n+1} = 2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2s_n + (-1)^{n+1}\sqrt{n} + o(1)$$

Il suit le développement de s_n à deux termes $2s_n = (-1)^n\sqrt{n} + \ell + o(1)$

3) Il y a un petit piège ici, des questions précédentes on déduit $\frac{1}{s_n} \sim \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}} = w_n$ et cette dernière série converge immédiatement par le CSSA **mais on ne peut pas** en déduire la convergence de la série $\sum \frac{1}{s_n}$ car le critère d'équivalent **ne s'applique pas ici** : les termes ne sont pas positifs. On va chercher l'équivalent de $\frac{1}{s_n} - w_n$ en se servant de la remarque plus haut :

$$\frac{1}{s_n} - w_n = \frac{\sqrt{n} - 2(-1)^n s_n}{s_n \sqrt{n}} = \frac{(-1)^{n+1}}{s_n \sqrt{n}} \left((-1)^{n+1} \sqrt{n} + 2s_n \right) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{s_n \sqrt{n}} \ell \sim \frac{-2\ell}{n}$$

La série harmonique $\sum \frac{-2\ell}{n}$ diverge **mais ici** le critère d'équivalent s'applique par la **positivité**. On en déduit que la série de terme général $x_n = \frac{1}{s_n} - w_n$ diverge. Comme $\frac{1}{s_n} = x_n + w_n$, somme d'une série convergente et d'une série

divergente, la série $\sum \frac{1}{s_n}$ **diverge**.

Ensea PSI 2023 | CCP PSI 2016 (calcul de somme)

ENONCÉ 86 Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $(n^2 + n + 1)x^n$.

On applique le critère d'Alembert pour les séries, en posant $u_n = (n^2 + n + 1)x^n$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1} \sim |x| \frac{n^2}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

- Si $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ converge, donc $R \geq 1$.
- Si $|x| > 1$, la série $\sum u_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

Finalement $R = 1$.

Pour la somme, vous avez souvent l'idée de couper en 3 (avez-vous une raison vraiment réfléchie?), ce qui n'est pas une très bonne idée, le $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ étant « embêtant ». Néanmoins, le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ se fait rapidement (voir en bas) :

Pour n^2 , la seule façon d'y arriver et de ramener à la dérivée seconde en écrivant $n^2 = n(n-1) + n$ et en re-coupant en 2, donc encore 2 calculs de somme et on risque de ne pas finir dans le temps imparti. Le $n(n-1)$ provient de $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$. En fait il est plus rapide d'écrire le polynôme initial (le $n^2 + n + 1$ mais l'énoncé pourrait prendre n'importe lequel autre) dans la **base** $(n(n-1), n, 1)$ (base car 3 degrés distincts en dimension 3 de $\mathbb{R}_2[X]$)

$$n^2 + n + 1 = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma \iff \begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -\alpha + \beta \\ 1 = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

On a identifié chaque terme de degré différent. On termine proprement pour $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 2n + 1)x^n \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)'' + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &\stackrel{(2)}{=} x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' + 2x \left(\frac{1}{1-x} \right)' + \left(\frac{1}{1-x} \right) \stackrel{(3)}{=} x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + 2x \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1}{1-x} = \frac{x^2 + 1}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

- (1) C'est plutôt là où il est astucieux de couper en 3
- (2) On applique la dérivation terme à terme, possible sur $] -R, R[$. Ici, $R = 1$ et $x \in]-1, 1[$. Ok.
- (3) On peut savoir que la dérivée n -ième de $\frac{1}{a-x}$ est $\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

IMT PSI 2023-2022 (équivalent somme)

ENONCÉ 90 Trouvez un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant (i) une comparaison série-intégrale (ii) les sommes de Riemann

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante d'où l'encadrement : $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}}$, la 2^e seulement pour $k \geq 2$.

Puis, on somme ces inégalités de $n+1$ à $2n$:

$$2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})$$

On a $2(\sqrt{2n} - \sqrt{n}) = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$ et on effectue un petit dl pour obtenir un équivalent de la quantité de gauche :

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) &= 2\left(\sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{1/2} - \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2}\right) = 2\left(\sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{n} o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= 2\left((\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \end{aligned}$$

Par le théorème encadrement des équivalents, on conclut

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} + 1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ &\stackrel{(2)}{=} \sqrt{n} S_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} \stackrel{(3)}{\sim} \sqrt{n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{n} \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^1 = (2\sqrt{2} - 2)\sqrt{n} \end{aligned}$$

- (1) Changement d'indices $k \rightarrow k + n$
- (2) On reconnaît une somme de Riemann dans la quantité du type $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ (ou $\sum_{k=0}^{n-1}$). **Attention** ! $\sum_{k=0}^n$ n'est pas correct car un des « rectangles d'approche déborde » de l'aire concernée, ou de l'intervalle $[0, 1]$ si vous préférez (faites un dessin). Ici $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, fonction qui est bien **continue** sur $[0, 1]$. Le théorème s'applique : $S_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = I$
- (3) Comme $I \neq 0$, $S_n \rightarrow I$ amène $S_n \sim I$. D'autre part $\frac{1}{\sqrt{2n}} = o(\sqrt{n})$

IMT 2023 (nature série alternée)

ENONCÉ 98 Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)\sqrt{n}}$, $n \geq 1$

On effectue un développement asymptotique jusqu'à un grand-O de $\frac{1}{n^a}$ avec $a > 1$. Le grand-0 évite de calculer, à chaque étape, le terme en $\frac{1}{n^a}$ donc fait gagner un peu de temps :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)\sqrt{n}} \stackrel{(1)}{=} \frac{(-1)^n}{\ln n \sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\ln(n)\sqrt{n}}} \stackrel{(2)}{=} \frac{(-1)^n}{\ln n \sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n \ln^2(n)}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{\ln n \sqrt{n}}}_{t_n} - \underbrace{\frac{1}{n \ln^2(n)}}_{v_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2} \ln^3(n)}\right)}_{w_n} \end{aligned}$$

- (1) On met en facteur le « plus fort » pour obtenir du $\rightarrow 0$ et ramener à un dl usuel en 0.
- (2) On utilise le dl de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + O(u^2)$ car $u = \frac{(-1)^n}{\ln n \sqrt{n}} \rightarrow 0$. A la précision $O(u^2)$ devrait suffire, mais cela est plus dur à deviner. Si vous en faites trop, vous perdez du temps, si vous en faites pas assez, il faudra revenir à chaque ligne et en rajouter un, perte de temps aussi.
- La série $\sum t_n$ converge par le CSSA. Il est clair que $\frac{1}{\ln n \sqrt{n}}$ décroît vers 0.
- La série $\sum v_n$ est une série de Bertrand. Je rappelle que le bon critère est le critère $n^\alpha v_n$ **sauf qu'il** ne

« marche » pas pour la puissance de n égale à 1, ce qui est le cas ici. Il faut appliquer la comparaison d'aires séries-intégrales. voir après. La série converge en fait.

- La série $\sum w_n$ est le grand-O d'une série positive convergente : cette série de Bertrand converge bien, ici on peut utiliser le critère $n^\alpha w_n$. Une petite analyse, que je ne produis pas ici, montre que $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ convient : en effet $\lim n^{3/2} w_n = \lim \frac{1}{\ln^3 n} = 0$.

Par sommation la série de l'énoncé $\sum u_n$ converge.

Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ converge; on pose $f(x) = \frac{1}{x \ln^2(x)}$, fonction clairement décroissante sur \mathbb{R}^{+*} . On en déduit (**seulement** pour $k \geq 3$: en $k = 2$, $k - 1 = 1$ et un « problème » pour l'intégrale de droite) :

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln^2(x)} \leq \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x \ln^2(x)} \implies \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln^2(x)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x \ln^2(x)}$$

D'où, en remarquant que $\frac{1}{x \ln^2(x)} = \frac{u'}{u^2}$ avec $u = \ln x$

$$\left[\frac{-1}{\ln x} \right]_3^{n+1} = \int_3^{n+1} \frac{dx}{x \ln^2(x)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_2^n \frac{dx}{x \ln^2(x)} = \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_2^n = \frac{-1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2} \leq \frac{1}{\ln 2}$$

On en déduit que les sommes partielles de la série $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2(k)}$, série **positive**, sont **bornées**, donc, si on sait bien son cours, la série converge. La minoration ne sert pas (elle servirait si la série diverge)

IMT PSI 2023-2019 (nature série alternée)

ENONCÉ 100 Nature de la série $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$.

Attention au gros piège : toute série du type $\sum (-1)^n u_n$ n'est pas alternée! Il faut vérifier u_n de **signe constant**, ou tout au moins, à partir d'un certain rang. 2 réflexes de base :

- On essaye d'abord le CSSA, en prêtant attention notamment à $|u_n| \searrow$ **qu'il faut** prouver!
- Sinon effectue un développement (limité ou asymptotique) jusqu'à la précision $o(\frac{1}{n^a})$ avec $a > 1$. On peut utiliser « l'astuce » du grand-O

Intuitivement, $|u_n|$ ne semble pas décroître; plutôt que de tenter une preuve hasardeuse, on passe au développement

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \rightarrow \text{Tous les termes en } \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et « + grands » dans le grand-O!} \\ &= (-1)^n \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= (-1)^n \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{v_n} - \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{w_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{y_n} \right) \end{aligned}$$

- La série $\sum w_n$ converge par le CSSA
- La série harmonique $\sum w_n$ diverge.
- La série $\sum y_n$ converge comme grand-O d'une série de Riemann absolument convergente.

Par somme de séries convergentes et **d'une** série divergente, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque : Attention à ne pas avoir diverge + diverge car on ne peut alors pas conclure.

Mines-Ponts PSI 2023 (Permutation série harmonique) *

ENONCÉ 101 On admet $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. On définit aussi pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1) Justifiez la convergence de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ et calculez sa somme.

2) On définit une bijection de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* de la manière suivante :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	...

Déterminez $\sigma(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Calculez $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$

1) CSSA. Pour calculer la somme, il faut passer à la limite pour $x \rightarrow 1$ dans le développement en série entière (de rayon 1) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Le membre de gauche tend vers $\ln 2$. Pour celui de droite, on peut savoir que, comme la série converge en 1, nécessairement la fonction-somme est continue et tend vers la somme de la série en 1, bref on peut remplacer par 1, **ce qui donne** le résultat (je vous l'ai rappelé récemment), mais ce n'est pas au programme!

On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ et on démontre la continuité de la fonction-somme (notons-la $S(x)$) sur $[0, 1]$ donc en 1, donc on pourra remplacer x par 1 dans la somme à la limite. On utilise le théorème de continuité des séries de fonctions :

- Chaque f_n est clairement continue sur $[0, 1]$
- A x **fixé**, la série numérique $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ vérifie le CSSA; je ne le vérifie pas ici, c'est aisé, juste la décroissance de la suite $|f_n(x)|$ résulte du produit de 2 suites décroissantes positives x^n , car $0 \leq x \leq 1$, et $\frac{1}{n}$. On applique alors le résultat sur la majoration du reste :

$$\forall x \in [0, 1], \left| R_n(x) \right| \leq \left| \frac{x^n}{n} \right| \implies \|R_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |R_n(x)| \leq \left\| \frac{x^n}{n} \right\|_{\infty} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0, 1]$

Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

2) Ce n'est pas si simple. Il faut bien regarder ... Il faut regarder modulo 3 ... On a $3k \rightarrow 2k$, $3k+1 \rightarrow 4k+1$, $3k+2 \rightarrow 4k+3$. Cela correspond bien au tableau. C'est bien de $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$. Il faut vérifier bijectif : la réciproque est (éviter de mettre les flèches à l'envers...), le plus propre est sans doute de prendre modulo 4 : $4k \rightarrow 6k$, $4k+1 \rightarrow 3k+1$, $4k+2 \rightarrow 6k+2$, $4k+3 \rightarrow 3k+2$

3) Je rappelle que, comme la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite, elle est sommable ssi elle est une série absolument convergente, ce qui n'est pas le cas ici. Par conséquent, en réordonnant la suite, on peut trouver une autre somme (de la série réordonnée), c'est le cas ici. C'est très général, on démontre même que, pour une série convergente non absolument convergente (semi-convergente et donc non sommable), on peut réordonner la suite pour trouver en somme **le réel que l'on veut** et même $+\infty$ ou $-\infty$! Juste en réordonnant (ce qui équivaut à choisir une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme dans cet exo), incroyable, non?

Revenons à notre exo. Il faut utiliser le développement asymptotique de H_n (à savoir re-démontrer d'ailleurs!) rappelé en préambule de l'énoncé; comment? Lisez la suite. **Attention!** à ne pas partir de la somme infinie, car on n'a pas prouvé que la série converge et **Attention!** aussi, elle ne vérifie pas le CSSA : les signes font $- + + - + + - + +$. On le prouve après. L'idée est de sommer partiellement jusqu'à $3n$, plus pratique par congruence modulo 3, puis de passer à la limite :

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \sum_{1 \leq 3k \leq 3n} u_{\sigma(3k)} + \sum_{1 \leq 3k+1 \leq 3n} u_{\sigma(3k+1)} + \sum_{1 \leq 3k+2 \leq 3n} u_{\sigma(3k+2)} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{-1}{2k} + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{1}{4k+1} + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{1}{4k+3} = -\frac{1}{2} H_n + \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq 4n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} \\ &= -\frac{1}{2} H_n + H_{4n} - \frac{1}{2} H_{2n} = -\frac{1}{2} (\ln n + \gamma) + \ln(4n) + \gamma - \frac{1}{2} (\ln(2n) + \gamma) + o(1) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{n \times 2n}{16n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{16} = \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Attention! le fait que la suite des sommes partielles (S_{3n}) converge **ne prouve pas** que la série converge. On termine la preuve de la convergence de la série avec les 2 suites extraites « complémentaires » $S_{3n+1} = S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2 + 0$ et $S_{3n+2} = S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)} \rightarrow \frac{3}{2} \ln 2 + 0 + 0$

VI — SÉRIES ET SUITES DE FONCTIONS

Mines-Ponts PSI 2023 (série entière) ✱

ENONCÉ 102 On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

- 1) Montrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1}$.
- 2) Montrez $u_n \sim \sqrt{n}$ et déterminez la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.
- 3) Donnez le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.
- 4) Calculez $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1) Une récurrence immédiate donne $u_n \geq 0$ puis $u_n \geq \sqrt{n}$. On démontre $u_n \leq 2\sqrt{n+1}$ par récurrence sur $n \geq 0$

- $\mathcal{P}(0) : u_0 = 1 \leq 2\sqrt{0+1}$. Ok.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai pour $n \geq 0$. $u_{n+1}^2 = n+1 + u_n \leq n+1 + 2\sqrt{n+1}$. On a $n+1 + 2\sqrt{n+1} \leq 4(n+2)$ ssi $2\sqrt{n+1} \leq 3n+7$ ssi (nombres ≥ 0) $4(n+1) \leq 9n^2 + 49 + 42n$ ssi $9n^2 + 38n + 45 \geq 0$. Ok. On termine en passant à la racine carrée, croissante, qui conserve l'inégalité

2) On pose $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$, suite bornée par Q1. Puis

$$v_n = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{n-1} v_{n-1}}{n}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/2} v_{n-1} \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1+0)^{1/2} = 1$$

On a donc $u_n \sim \sqrt{n}$. $v_n = 1 + o(1)$, on reprend le calcul plus haut :

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{1/2} (1 + o(1)) \right)^{1/2} = \left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) (1 + o(1)) \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Il vient $u_n - \sqrt{n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

3) Comme $u_n \sqrt{n}$, on a immédiatement $R(\sum u_n x^n) = R(\sum \sqrt{n} x^n) = 1$

4) Etude d'une série entière au bord, question classique. Ici on demande la limite. Quand on demande un équivalent, c'est en général plus dur. Ici, on peut conjecturer que le comportement de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ en 1 est probablement le même que celui de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$ qui est visiblement $+\infty$. Démontrons-le :

$x \rightarrow u_n x^n$ étant croissante sur $[0, 1]$ car $u_n \geq 0$, par sommation, même infinie, S l'est aussi. Par suite, S admet une limite, finie ou infinie, en 1 notée ℓ . Par positivité on a aussi $S(x) \geq \sum_{n=0}^N u_n x^n$, pour tout N . Comme les limites existent, on passe à la limite en 1 qui conserve l'inégalité, et donc $\ell \geq \sum_{n=1}^N u_n$ et ce pour tout N . Comme cette série diverge (par équivalence à \sqrt{n} et par positivité), elle diverge « vers » $+\infty$, sa somme partielle n'est pas bornée, donc $\ell = +\infty$ nécessairement.

Remarques

- Ici, on a même $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \sim_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$. C'est un résultat général (qui n'est pas au programme) : si $a_n \sim b_n$, $a_n \geq 0$ aprc (donc $b_n \geq 0$ aussi), la série $\sum a_n x^n$ diverge en $x = R$ (donc $\sum b_n x^n$ aussi), alors l'équivalence est vérifiée. Je vous ai déjà traité la démonstration (avec des ε). Vous pouvez la retrouver dans exo19 du td sur les séries entières. Cela tombe assez souvent de même que la limite demandée au-dessus.
- Je rappelle quelques résultats des séries entières sur les bords (cad dans \mathbb{R} en $\pm R$, sur \mathbb{C} c'est le cercle de convergence). Ces résultats ne sont pas au programme par ailleurs. Si la série entière converge en $x = R$ (de somme S), alors **nécessairement**, la fonction-somme tend vers S en R (autrement dit elle est continue en R).
- La « réciproque » est fautive, cad si la fonction-somme a une limite en R (par exemple ℓ), la série entière ne converge pas nécessairement en R . Par contre, si elle converge, sa somme vaut ℓ . Le contre-exemple le plus simple est $\frac{1}{1+x}$ et son développement en série entière (je vous laisse y réfléchir). Évidemment, si on rajoute des hypothèses (sur les coefficients a_n de la série entière), cela devient vrai. C'est ce qu'on appelle les théorèmes de Tauber. Par exemple les $a_n \geq 0$ ou par exemple $a_n = O(\frac{1}{n})$.

Mines-Ponts PSI 2023 (suite de fonctions polynomiales) *

ENONCÉ 108 On définit la suite de fonctions (p_n) par $p_0 : x \in [0, 1] \rightarrow 0$ et $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x))^2$

1) Montrez $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

2) En déduire la convergence simple de la suite (p_n) et trouvez sa limite.

3) Montrez que la suite converge uniformément sur $[0, 1]$

1) Posons $g_x(y) = y + \frac{1}{2}(x - y^2)$ afin que $p_{n+1}(x) = g(p_n(x))$. g_x (la courbe de) est une parabole, dirigée vers le bas, de sommet d'abscisse $y = 1$, donc croissante pour $y \leq 1$. Ses points fixes vérifient $g_x(y) = y \iff y = \pm\sqrt{x}$, pour $x \in [0, 1]$. Montrons par récurrence pour $n \geq 0, \mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, 1], 0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

- $\mathcal{P}(0) : 0 \leq p_0(x) = 0 \leq p_1(x) = \frac{1}{2}x \leq \sqrt{x}$ pour $x \in [0, 1]$. En fait $x \leq \sqrt{x}$ est une inégalité de convexité avec $y = x$ la corde sur $[0, 1]$

- Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour $n \geq 0$. Soit $0 \leq x \leq 1$. $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ donc, comme ces réels sont ≤ 1 , par croissance de g_x , $p_{n+1}(x) = g_x(p_n(x)) \leq g_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$. Puis $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ amène $p_n(x)^2 \leq x$, par positivité de $p_n(x)$, d'où $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$.

2) Pour tout x fixé de $[0, 1]$, la suite numérique positive $(p_n(x))$ est croissante et majorée, donc converge, et comme c'est une suite récurrente $u_{n+1} = g_x(u_n)$, avec g_x continue, elle ne peut converger que vers un point fixe de g_x , qui ne peut être que \sqrt{x} par positivité.

Conclusion : La suite de fonctions (p_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers $x \rightarrow \sqrt{x}$

3) $p_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (p_n(x) - \sqrt{x})(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x)))$ donc, comme $p_n(x) + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$, $\|p_{n+1} - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty$. On en déduit que la suite $\|p_n - \sqrt{x}\|_\infty$ converge vers $\ell \geq 0$ mais ce n'est pas suffisant, il faut prouver $\ell = 0$.

Méthode 1 (générale) : Si $\ell > 0$, par compacité de $[0, 1]$ et continuité, il existe x_n tel que $\|p_n - \sqrt{x}\|_\infty = |p_n(x_n) - \sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} - p_n(x_n) \geq \ell$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß (vous l'avez vu en MPSI mais malheureusement, il n'est pas au programme de PSI...), (x_n) étant une suite bornée (car $\in [0, 1]$), il existe une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)} \rightarrow y$ (je rappelle que, **par définition** d'une sous-suite, $\varphi(n)$ croît vers $+\infty$). On utilise la décroissance de $n \rightarrow \sqrt{x_{\varphi(n)}} - p_n(x_{\varphi(n)})$. Pour $N \geq \varphi(n)$

$$\sqrt{x_{\varphi(n)}} - p_N(x_{\varphi(n)}) \geq \sqrt{x_{\varphi(n)}} - p_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geq \ell$$

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, il vient $\sqrt{y} - p_N(y) \geq \ell > 0$, ce qui contredit la convergence simple en y . Absurde!

Méthode 2 :

Soit $\varepsilon > 0$.

Sur $[0, \varepsilon^2]$, $\sup_{[0, \varepsilon^2]} \sqrt{x} - p_n(x) \leq \sup_{[0, \varepsilon^2]} \sqrt{x} - p_0(x) = \varepsilon$.

Sur $[\varepsilon^2, 1]$, en reprenant la 1^{re} égalité et $p_n(x) \geq 0$ (la norme infinie s'entend sur ce segment) :

$$\|p_{n+1} - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2}\right) \implies \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_0 - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

Comme cette suite géométrique tend vers 0, le résultat est acquis.

Remarques

- A peu de choses près, la méthode 1 démontre le 1^{er} théorème de Dini : si une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur un **segment** $[a, b]$, que les f_n et f sont continues et que, à x fixé, la suite $(f_n(x))$ est croissante, alors la convergence est uniforme. Si vous êtes curieux, il y a aussi le 2^e théorème de Dini assez voisin, vous pouvez aller voir sur Internet.
- Par récurrence il est clair que les $p_n(x)$ sont des polynômes. Le théorème de Stone-Weierstraß (pas au programme) affirme que pour **toute** fonction continue f sur $[a, b]$, il existe une suite de **polynômes** qui converge uniformément vers f . Dans cet exo, nous avons fait « mieux », nous avons construit **explicitement** une suite de polynômes qui converge uniformément vers \sqrt{x} sur $[0, 1]$.

ENONCÉ 111 Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

- 1) Montrez que la suite (a_n) est convergente et déterminez $\lim a_n$.
- 2) Montrez que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge. [2016 : Question absente]
- 3) [2021-17-16 : Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{n+1}$].
- 4) Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. [2016 : Domaine de définition]
- 5) Montrez $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$. [2021-17-16-11 Question absente]
- 6) Trouvez une équation différentielle vérifiée par f . [2017-16-11 : question absente].

1) On pose $f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ et on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $I = [0, 1]$

• **Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur I :**

On remarque que, à t fixé c'est une suite géométrique. Par suite, si $0 \leq t < 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1+t^2}{2} < 1$ et donc $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais par contre, si $t = 1$, $f_n(t) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Il y a donc convergence simple vers la fonction **continue par morceaux** sur $[0, 1]$, notée f , qui est nulle sur $[0, 1[$ et valant 1 en 1.

• **Hypothèse de Domination sur I :**

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| = \left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^n = 1 = \xi(t)$$

$0 \leq t^2 \leq 1$ ξ est **intégrable** sur I c'est une constante! en rappelant qu'une constante n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (sauf 0).

$$\text{On conclut } \lim a_n = \lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_{[0,1[} 0 + \int_{\{1\}} 1 = 0.$$

Remarque : Il était prévisible que la **suite** tende vers 0 car on étudie les séries associées dans les questions suivantes.

2) La série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie les propriétés suivantes :

- La série est bien alternée car $a_n \geq 0$ du fait de la fonction-intégrande positive : c'est un carré (réel).
- $a_n \rightarrow 0$ d'après la question précédente.
- $|(-1)^n a_n| = a_n \searrow$ comme cela résulte de la croissance de l'intégrale t et des propriétés des suites géométriques :

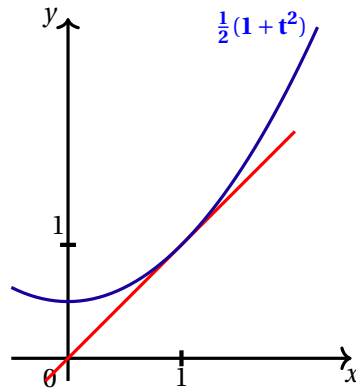
$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{1+t^2}{2} \leq 1 \implies \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \implies a_{n+1} \leq a_n$$

Attention quand même à vérifier que les bornes de l'intégrale sont dans le sens correct! Du critère C.S.S.A, il résulte que la série converge.

3) Question un peu délicate ... on va montrer $\frac{1+t^2}{2} \geq t$

Méthode 1 (graphique)

C'est pas parfait mais c'est mieux que rien. Je ne justifie pas ici les tracés



Méthode 2 :

Vous étudier les variations de la fonction auxiliaire différence mais **uniquement** sur $[0, 1]$. Je ne le traite pas ici.

Méthode 3 (convexité)

C'est limite-programme mais cela passera (uniquement si vous connaissez bien le thème!). La fonction $f(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ est **convexe sur** $[0, 1]$ (et même \mathbb{R}) car $f''(t) = 1 \geq 0$ donc au-dessus de sa tangente en $(1, 1)$ qui a pour équation $y = t$.

On en déduit alors
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4) Ici, il est assez difficile d'appliquer la règle de d'Alembert pour trouver le rayon de convergence car la limite est du type $\frac{0}{0}$, ce qui vous oblige à travailler les équivalents/dls, très délicats lorsque c'est une intégrale (il n'y a aucun théorème en PSI). On va donc procéder à un encadrement de a_n par deux coefficients qui donneront des séries entières de **même rayon**, méthode inspirée par la question précédente qui donne déjà un côté :

- de $a_n \geq \frac{1}{n+1}$, on tire que le rayon est plus petit que celui de la série entière $\sum \frac{1}{n+1} x^n$. A celle-ci, on pourrait appliquer la méthode de d'Alembert mais c'est maladroit! c'est une série connue : c'est $\frac{1}{x} (-\ln(1-x))$ (je vous laisse y réfléchir) qui a pour rayon 1, soit $R \leq 1$.
- De l'autre côté on écrit tout simplement $a_n \leq 1$, comme d'ailleurs on l'a déjà vu. on en déduit que R est donc plus grand que le rayon de la série entière $\sum 1x_n$. On aura reconnu la série géométrique de rayon 1 ;

Finalement $R = 1$.

5)

CCINP PSI 2023-2022 (série entière)

ENONCÉ 113 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_{kn} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ et $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$.

- 1) Montrez que I_{kn} est bien définie.
- 2) Calculez I_{kn}
- 3) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$?
- 4) Montrez l'égalité $\forall x \in]-R, R[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

1)

- La fonction $f_{k,n}(t) = t^k e^{-nt}$ est **continue** sur $[0, +\infty[$. (**Attention !** $k \geq 0$ permet de « fermer » en 0)

- **Etude en $t = +\infty$** Comme $n > 0$ (**Attention!** à bien vérifier ceci), on en déduit $\lim_{+\infty} t^2 f_{kn}(t) = 0$ et donc, par le critère $t^2 f(t)$, **l'intégrabilité** de f_{kn} en $+\infty$.

f_{kn} est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ d'où l'intégrale I_{kn} existe.

2) On effectue une iipp avec $u = t^k \quad v' = e^{-nt} \quad u' = kt^{k-1} \quad v = -\frac{1}{n}e^{-nt}$

$$\forall k \geq 1, I_{kn} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt = \left[-\frac{1}{n} t^k e^{-nt} \right]_0^{+\infty} + \frac{k}{n} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-nt} dt = 0 + \frac{k}{n} I_{k-1,n}$$

Utiliser l'iipp en $+\infty$ est licite **si on prend** $k \geq 1$, car alors la deuxième intégrale existe bien et d'ailleurs $k > 0$ est aussi **nécessaire** pour que le premier membre de l'iipp vaille 0 en $t = 0$. Il faut penser à bien écrire tout cela sur sa copie.

Une récurrence immédiate amène alors $I_{kn} = \frac{k!}{n^k} I_0$, avec $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n}$, d'où finalement $I_{kn} = \frac{k!}{n^{k+1}}$

Remarque : On remarque que $a_n = I_{nn}$

3) On essaye la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= |x| \frac{(n+1)! n^{n+1}}{n!(n+1)^{n+2}} = |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = |x| \exp \left((n+1) \ln \frac{n}{n+1} \right) = |x| \exp \left((n+1) \ln \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &= |x| \exp \left((n+1) \ln \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) = |x| \exp \left((n+1) \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) = |x| \exp \left(-1 + o(1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x| \frac{1}{e} \end{aligned}$$

- **Si** $\frac{|x|}{e} < 1 \iff |x| < e$, la série converge absolument, donc $R \geq e$
- **Si** $\frac{|x|}{e} > 1 \iff |x| > e$, la série diverge grossièrement, donc $R \leq e$

Finalement, $R = e$

4)

$$\begin{aligned} \forall x \in]-e, e[, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \underbrace{t^n e^{-nt} x^n}_{f_n(t)} dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt} x^n dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (txe^{-t})^n dt \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{txe^{-t}}{1 - txe^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt \end{aligned}$$

- (1) On utilise le théorème d'intégration terme à terme :
 - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, +\infty[$ (Q1).
 - La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ C'est une série géométrique mais **Attention!**, il faut vérifier la raison $|r| = |txe^{-t}| < 1$! On est contraint d'étudier la fonction $g(t) = te^{-t}$: $g'(t) = e^{-t}(1-t)$ et une très simple étude des variations (je ne mets pas les détails ni le tableau ici) montre que le sup sur $[0, +\infty[$ est en $t = 1$ et $g(1) = e^{-1}$. On a bien $|txe^{-t}| < e \times e^{-1} = 1$. et sa somme est **continue par morceaux** sur $[0, +\infty[$.
- La série numérique $\sum_n \int_{[0, +\infty[} |f_n|$ converge : $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = I_{nn} |x|^n = a_n |x|^n$, terme de la série en-

tière qui converge donc puisque par hypothèse $x \in]-R, R[$

- (2) **Attention !** la somme de la série géométrique commence à 1 ! On a alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u} - 1 = \frac{u}{1-u}$

CCINP PSI 2023 (série de fonctions)

ENONCÉ 120 Soit $a > 0$. Soit $f_a : t \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t$

- 1) Etudiez la convergence simple de la série.
- 2) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, donnez une expression simple de $f_a(t)$.
- 3) Pour quelles valeurs de a , l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_a(t) dt$ converge-t-elle?
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n t dt$. Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n(a)$ converge-t-elle? Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

1) **Attention !** déjà à bien voir, pour la convergence simple, que $\sin^a t$ n'est qu'une constante (qui existe, car $a > 0$), donc on ne s'en occupe « pas trop » d'un point de vue séries (il n'y a pas de n), sauf si elle est nulle !

- Si $t = k\pi$, c'est la série nulle qui converge
- Dans tous les autres cas, la série converge ssi la série $\sum \cos^n t$ converge, qui est une série **géométrique**, par conséquent ssi $|\cos t| < 1$ ssi $t \neq k\pi$, ce qui n'est pas dans ce cas-là

La série de fonctions converge donc **simplement sur** \mathbb{R} tout entier.

2) Comme on a remarqué série géométrique convergente (pour $t \neq k\pi$ mais sinon la somme vaut $f_a(k\pi) = 0$)

$$\forall t \neq k\pi, f_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t = \sin^a t \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n t = \frac{\sin^a t}{1 - \cos t}$$

On remarque que la formule est vraie aussi même en $k\pi$ donc sur \mathbb{R} tout entier.

3) On reprend l'expression de Q2 : $f_a(t) = \frac{\sin^a t}{1 - \cos t}$:

- f_a est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. $1 - \cos t$ ne s'y annule qu'en $t = 0$
- **Etude en $t = 0$** : $|f_a(t)| \sim \frac{t^a}{t^{2-a}} = \frac{1}{t^{2-a}}$. Du critère d'équivalent de Riemann, il vient f_a intégrable en 0 ssi $2 - a < 1$ ssi $a > 1$.

$\int_0^{\pi/2} f_a$ converge ssi elle converge absolument (par positivité de f_a) et donc ssi f_a intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ ssi $a > 1$.

4) Ici, au lieu d'appliquer la méthode usuelle qui est d'utiliser des critères, on revient aux sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^k(t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \sin^a t \cos^k(t)}_{g_n(t)} dt$$

1^{er} cas : Si $a > 1$, on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- **Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (g_n) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:**

la suite de fonctions g_n converge simplement vers f_a , c'est Q1, car $a > 1$

- **Hypothèse de Domination sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:**

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[, \forall n \in \mathbb{N}, |g_n(t)| = \sin^a(t) \frac{1 - \cos^{n+1} t}{1 - \cos t} \leq \sin^a(t) \frac{1}{1 - \cos t} = f_a(t) = \xi(t)$$

La majoration résulte de la positivité de $\cos t$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. ξ est **intégrable** sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ C'est Q3 car $a > 1$.

On a donc démontré $S_n(t) \rightarrow \int_0^{\pi/2} f_a(t) dt$.

2^e cas : Si $0 < a \leq 1$, on a toujours la convergence simple de la suite de fonctions $(g_n(t))$ vers $f_a(t)$ mais la majoration par f_a ne donne plus une fonction intégrable, le théorème ne s'applique plus. Comme les termes $u_n(a) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n t dt$ sont positifs, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$ existe toujours; si elle diverge, on peut considérer qu'elle vaut $+\infty$. Je rappelle que quand une fonction f est **positive** (ou une série numérique $\sum u_n$ est **positive**), quand l'intégrale $\int_I f$ diverge (ou la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge,) on peut considérer, à juste titre, qu'elles valent $+\infty$.

Attention ! ceci est faux dans le cas général : par exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ n'a aucun sens.

Supposons $\sum u_n(a)$ converge, donc sa somme est finie. Or sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^a \cos^n t dt$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme (voir après) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^a \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a \cos^n t dt = \int_0^{\pi/2} f_a(t) dt < +\infty$$

- Les $\sin^a t \cos^n t$ sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ continuité sur le segment **fermé** $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- La série de fonctions $\sum_n \sin^a t \cos^n t$ converge simplement sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ c'est Q1 et sa somme est **continue par morceaux** sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- La série numérique $\sum_n \int_{]0, \frac{\pi}{2}[} |\sin^a t \cos^n t|$ converge : c'est le supposons du départ du raisonnement par l'absurde.

Le théorème s'énonce ensuite comme suit : alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t$ est **intégrable** (et on peut intégrer terme à terme). Ceci est **absurde** car cette somme est f_a , non intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ car $a \leq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3) &= \int_0^{\pi/2} f_3(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1 - \cos t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos^2 t) \sin t}{1 - \cos t} dt \\ &\stackrel{(1)}{=} - \int_1^0 \frac{1 - u^2}{1 - u} du = \int_0^1 (1 + u) du = \left[u + \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- (1) On effectue le changement de variables $u = \cos t$ $du = -\sin t dt$ C^1 et bijectif de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, 1[$

CCP PSI 2023 - 2018 (développement en série d'une intégrale)

ENONCÉ 124

1) Montrez la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1 + e^t} dt$.

2) Montrez que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{1 + n^2}$.

1) La fonction $f(t) = \frac{\cos t}{1 + e^t}$ vérifie :

- f **continue** sur $[0, +\infty[$ car $1 + e^t$ ne s'y annule pas.
- $|f(t)| \leq \frac{1}{1 + e^t} \sim_{+\infty} e^{-t}$. Le critère de majoration et d'équivalent des fonctions **positives** ainsi que le critère $t^a f(t) : \lim_{+\infty} t^2 f(t) = 0$ permet de conclure à l'**intégrabilité** de f en $+\infty$.

f est donc **intégrable sur** $[0, +\infty[$, il suit l'intégrale I converge absolument donc converge.

$$\begin{aligned}
2) \quad I &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t} dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos t}{e^{-t}+1} dt \stackrel{(2)}{=} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t} \cos t}{e^{-t}+1} dt \stackrel{(3)}{=} \int_{]0,+\infty[} e^{-t} \cos t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \cos t e^{-(n+1)t}}_{f_n(t)} dt \stackrel{(4)}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N f_n(t) dt \stackrel{(5)}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N f_n(t) dt \\
&\stackrel{(6)}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \cos t e^{-(n+1)t} dt \stackrel{(7)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+1)^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}
\end{aligned}$$

- (1) Cette astuce est obligatoire en anticipant le développement du (3) : on a $e^{-t} < 1$ **mais pas** $e^t < 1$.
- (2) Je rappelle qu'à partir du moment où une intégrale existe (ou converge), on a $\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f$. Cette astuce est aussi en anticipant le développement du (3) où il faut $-1 < e^{-t} < 1$ ce qui impose $t \neq 0$.
- (3) On utilise le développement en série entière $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$ valide pour $|u| < 1$. On a bien $|e^{-t}| < 1$, pour $t \in]0, +\infty[$.
- (4) Le théorème usuel d'intégration terme à terme ne « marche » pas bien : il est difficile de démontrer que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**³.
- (5) Le théorème de Lebesgue s'applique car :
 - On a bien la **convergence simple** de $\sum_{n=1}^N f_n(t)$, pour tout $t \in]0, +\infty[$ (lorsque $N \rightarrow +\infty$), puisque cette série converge puisqu'elle vient d'un développement en série!
 - **Domination** :

$$\left| \sum_{n=0}^N (-1)^n \cos t e^{-(n+1)t} \right| = |\cos t| e^{-t} \left| \frac{1 - (-1)^{N+1} e^{-(N+1)t}}{1 - (-e^{-t})} \right| \leq \frac{e^{-t} \times (1+1)}{1 - e^{-t}} \sim \frac{2}{e} 1^{-t} = \varphi(t)$$

φ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ en vertu du critère $t^a f(t)$.

- (6) On peut ici intervertir l'intégration et la somme car la somme est **finie**.
- (7) Ceci résulte du calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos t e^{-(n+1)t} dt &= \int_0^{+\infty} \Re(e^{it}) e^{-(n+1)t} dt = \int_0^{+\infty} \Re(e^{t(i-(n+1))}) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-(n+1))} dt\right) \\
&= \Re\left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{t(i-(n+1))}}{i-(n+1)}\right]_0^A\right) = \Re\left(\frac{-1}{i-(n+1)}\right) = \Re\left(\frac{i+(n+1)}{(n+1)^2+1}\right) = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}
\end{aligned}$$

La limite de la **fonction complexe** $e^{A(i-(n+1))}$ lorsque $A \rightarrow +\infty$ vaut bien 0 car en passant au module, on obtient $|e^{A(i-(n+1))}| = e^{-(n+1)A}$.

3. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941). Reconnu pour sa théorie de l'intégration initiée dans sa thèse de 1902 « *Intégrale, longueur, aire* ».

ENONCÉ 125

1) Soit une suite (u_n) décroissante de limite nulle. Montrez que $\sum (-1)^n u_n$ converge

Soit $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n^2 + t^2}$. On se propose de montrer $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi}{2n}$

2) Montrez f_n intégrable sur $[0, +\infty[$.

3) Démontrez $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{\pi}{2n}$ et $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{(-1)^n \pi}{2n}$

4) Démontrez la convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0, +\infty[$.

5) Démontrez l'égalité ci-dessus.

1) On a reconnu le CSSA. Il reste à vérifier que u_n est bien de signe constant pour prouver série alternée : u_n décroît vers 0 donne bien $u_n \geq 0$ et $|u_n| = u_n$ décroît par hypothèse donc tout est Ok.

Remarque : La question que je me pose : fallait-il redémontrer le théorème de cours ? On démontre que les sommes partielles sont encadrées par les sommes partielles d'indice pair et impair, cad (S_{2n}) et (S_{2n+1}) et on montre qu'elles sont adjacentes. Revoir peut-être le cours de Sup (Terminale?) sur les suites adjacentes.

2) $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n^2 + t^2}$ vérifie :

- f_n est **continue** sur $[0, +\infty[$ ($t^2 + n^2$ ne s'annule pas).

- Etude en $t = +\infty$:** $|f_n(t)| \underset{t=+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Du critère d'équivalent à une fonction de Riemann **positive** et intégrable ($\alpha = 2 > 1$) en $+\infty$ amène f_n intégrable en $+\infty$

f_n est donc **intégrable** sur $[0, +\infty[$.

3)

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} = \left[\frac{1}{n} \arctan\left(\frac{t}{n}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} (-1)^n |f_n(t)| dt = \frac{(-1)^n \pi}{2n}$$

J'ai utilisé la primitive quasi-usuelle, que je vous avais conseillé d'apprendre, $\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$. si vous ne la connaissez pas, vous la retrouvez facilement en mettant d'abord a^2 en facteur.

4) On « essaye » d'abord la convergence normale : $\sup_{t \in [0, +\infty[} |f_n(t)| = \frac{1}{n^2}$ d'où la réponse immédiate : convergence normale donc uniforme **sur** $[0, +\infty[$.

5) Il suffit de vérifier l'application du théorème d'intégration terme à terme à $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$:

- Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, +\infty[$ Question Q2.
- La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$: Q4 car la convergence uniforme entraîne la convergence simple et sa somme est **continue par morceaux** sur $[0, +\infty[$.
- La série numérique $\sum_n \int_{[0, +\infty[} |f_n|$ converge : Non!! Elle diverge! série harmonique; il faut s'y prendre autrement...

Le 2^e théorème ne convient pas non plus car il faut un segment. On introduit la somme partielle $S_n(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$

et le Reste $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^{+\infty} S_n(t) + R_n(t) dt = \int_0^{+\infty} S_n(t) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n f_k(t) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} f_k(t) dt + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \pi}{2k} + \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \stackrel{(2)}{\implies} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi}{2k} \end{aligned}$$

- (1) On peut intervertir les 2 symboles car la somme est finie.
- (2) La limite résulte de la convergence de la série par le CSSA et que l'autre membre tend vers 0. En effet, remarquons que cette série vérifie aussi le CSSA *pour chaque t* (c'est immédiat, je ne mets pas de détails), par suite, pour tout t , $|R_n(t)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{t^2 + (n+1)^2} \right|$ puis :

$$0 \leq \left| \int_0^{+\infty} R_n(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |R_n(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + (n+1)^2} = \frac{\pi}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

VII — INTÉGRALES

*Mines-Ponts PSI 2023 (intégrale à paramètre de Laplace) **

ENONCÉ 128 On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ et, pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} dt$.

- 1) Montrez que F est bien définie.
- 2) Déterminez une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F sur $]0, +\infty[$.
- 3) Calculez $F(0)$ et $\lim_{+\infty} F(x)$.
- 4) En déduire la valeur de I .

1) on pose $f_x(t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$ qui vérifie :

- f_x est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout x réel
- $|f_x(t)| \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Du critère d'équivalent des fonctions positives et du critère de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), on en déduit f_x intégrable en 0 pour tout x réel.
- On distingue le cas $x > 0$ et $x = 0, x < 0$. En $x = 0$ $|f_x(t)| \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$, intégrable en $+\infty$ par Riemann. Pour $x > 0$, on applique le critère $t^2 f_x(t) \rightarrow 0$. intégrable en $t = +\infty$

f_x est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \geq 0$.

Remarque : Toute intégrale à paramètre du type $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ est la transformée de Laplace de f .

2) On applique d'abord le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre avec $J = \mathbb{R}^{+*}, I =]0, +\infty[, f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)}$.

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et donc existe sur $J \times I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{t+1}$

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \rightarrow f(x, t)$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$ Question précédente
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{t+1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t \in]0, +\infty[, x \rightarrow f(x, t)$ est C^1 sur \mathbb{R}^{+*} .

- **Hypothèse de Domination sur tout segment** $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{t+1} \right| \leq \frac{-\sqrt{t}e^{-at}}{t+1} = \xi(t)$$

La majoration résulte de $x \rightarrow e^{-xt}$ est décroissante sur $[a, b]$ car $t \geq 0$.

ξ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$ continuité sur $[0, +\infty[$ et $o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ car $a > 0$.

Alors F est de classe C^1 , continue et définie sur \mathbb{R}^{+*} . $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}e^{-xt}}{t+1} dt$

Remarque : On constate que la dérivée de la transformée de Laplace de $\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est la transformée de Laplace de $\frac{-\sqrt{t}}{t+1}$. Cela se généralise, même avec les dérivées n -ièmes : $(\mathcal{L}f)^{(n)}(x) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(x)$

On effectue le changement de variables $u = \sqrt{t}$ $t = u^2$ $dt = 2u du$, bijective et C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, puis $v = \sqrt{x} u$ changement linéaire :

$$\forall x > 0, F'(x) - F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}(-t-1)}{\sqrt{t}(t+1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} -2e^{-(\sqrt{x}u)^2} du = \int_0^{+\infty} -2e^{-v^2} \frac{dv}{\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$$

Il faut avoir reconnu l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. F est donc solution **sur** \mathbb{R}^{+*} de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' - y = \frac{-\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$

3) On effectue le changement de variables $u = \sqrt{t}$ $t = u^2$ $dt = 2u du$, bijective et C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = \left[2 \arctan u \right]_0^{+\infty} = \pi$$

$$\forall x > 0, 0 \leq |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{-\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On a réutilisé le calcul de la question précédente dans le dernier =, soit $\lim_{+\infty} F(x) = 0$.

4) L'intégration de l'équation différentielle **sur** \mathbb{R}^{+*} (je ne vous mets pas les détails, on a utilisé la variation de la constante) amène à

$$\forall x > 0, F(x) = Ce^x + e^x \int_1^x \frac{-e^{-t}\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} dt = e^x \left(C - \sqrt{\pi} \int_1^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right) = e^x \left(\sqrt{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt + D \right)$$

$\lim_{+\infty} F = 0$, et le reste de l'intégrale convergente I tendant vers 0, amène nécessairement $D = 0$, (sinon on aurait une limite égale à $\pm\infty$, selon le signe de la constante entre parenthèses).

Attention !, à priori, on ne peut pas remplacer par $x = 0$. On effectue ensuite la limite en 0 à droite :

- $\lim_{0^+} F(x) = F(0) = \pi$ car F est continue en 0. Je vous vérifie juste la domination sur tout \mathbb{R}^+ : $\left| \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(t+1)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$, intégrable sur \mathbb{R}^+ par le critère de Riemann en 0 et $+\infty$.
- Le membre de droite tend vers $e^0 \sqrt{\pi} I$, car cette intégrale I converge.

Par unicité de la limite, $\pi = \sqrt{\pi} I$ soit $I = \sqrt{\pi}$.

CCINP PSI 2023-2019-2018-2017-2014 (série alternée avec intégrale en gamma)

ENONCÉ 130 On définit $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ et $u : x \rightarrow \int_{x-1}^x \ln f(t) dt$. [201x : $u_n = \int_{n-1}^n \ln f(t) dt$]

1) Montrez que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2) Pour $x \geq 1$, déterminez une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$. [201x : Question absente.]

3) Établir la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{u(n)}$. [201x : Seulement donnez la nature] [2017 : Utilisez $u(x) = \int_{x-1}^x \ln f(t) dt$].

1) On applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre avec $J = [0, +\infty[$, $I = [0, +\infty[$ et $g(x, t) = t^x e^{-t}$. Il reste le problème : démontre-t-on définie (problème d'intégrabilité) **puis** continue ou directement les 2, puisque le théorème donne les deux? Là-encore, la réponse est simple : vous demandez à l'examineur. Je prends ici la réponse « *courte* »... Notons que, pour $x \geq 0$, il n'y a pas de problème d'intégrabilité en $t = 0$.

- $\forall x \in J, t \rightarrow g(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$
- $\forall t \in [0, +\infty[, x \rightarrow g(x, t)$ est continue sur J
- **Hypothèse de Domination sur tout segment** $[a, b] \subset J$:

$$\forall x \in [a, b] \subset J, \forall t \in [0, +\infty[, |g(x, t)| \leq \begin{cases} t^b e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ t^a e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \end{cases} = \xi(t)$$

Attention! à la majoration, c'est le piège : $x \rightarrow t^x = e^{x \ln t}$ est croissante pour $t \geq 1$ et décroissante pour $t \leq 1$ car $\ln t \leq 0$. C'est pour cela qu'il faut dominer par une fonction en 2 morceaux.

ξ est **intégrable** sur $[0, +\infty[$ Pas de problème en $t = 0$, elle est continue car $a \geq 0$ et en $t = +\infty$ on applique le critère $t^\alpha f(t)$ avec $\alpha = 2$: $t^2 t^b e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

Alors f est continue et définie sur J .

2) On effectue une IPP avec $u = t^x, v' = e^{-t}, u' = x t^{x-1}, v = -e^{-t}$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x f(x-1)$$

Attention! à bien justifier les IPPs lorsqu'il y a une borne $+\infty$: je rappelle qu'il faut vérifier qu'un des 2 morceaux existent. Ici, il suffit de dire que la 2^e intégrale existe puisqu'on reconnaît $x f(x-1)$ qui **existe bien car** $x-1 \geq 0$ car $x \geq 1$ par hypothèse.

Attention! à bien vérifier aussi que le 1^{er} membre prend bien la valeur 0 en $t = 0$: cela **vient** de $x > 0$ car, là encore, $x \geq 1$.

Remarque : Pour la suite, on peut calculer $f(n) = n f(n-1)$ et $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$. Une récurrence immédiate amène alors $f(n) = n!$ (C'est en fait la fonction Γ qui est l'extension de la factorielle et permet de calculer des factorielles de réels, nombres négatifs ou complexes...)

3)

On admet d'abord que $f(x)$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et tend vers $+\infty$ en $x = +\infty$, démo après.

Il faut commencer par vérifier que l'intégrale $u(x)$ existe pour $x \geq 1$. Cela résulte du fait que comme $f(x) \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$ sur $[x-1, x]$, pour x assez grand (pour $x \geq 1$ en fait, c'est la factorielle « étendue »), donc $\ln(f(t))$ **continue** sur le **fermé** $[x-1, x]$, d'où l'intégrabilité.

On commence par une idée simple : regarder si la série vérifie le CSSA. **Attention!** à ne pas oublier de vérifier alternée qui n'est pas évident (le signe de u_n ne l'est pas).

- On commence par regarder la décroissance de $\frac{1}{|u_n|}$ qui équivaut à regarder celle de $\frac{1}{u_n}$ qui équivaut à la croissance de u_n . **Il suffit** de démontrer que u est croissante. On écrit :

$$u(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(t)) dt = \int_1^x \ln(f(t)) dt - \int_1^{x-1} \ln(f(t)) dt \quad \text{par Chasles}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, en posant $G(x) = \int_1^x \ln(f(t)) dt$, dérivable car $\ln(f(t))$ **continue** sur $[1, x]$ car $f(t) \geq f(1) = 1! > 0$ et de dérivée $\ln(f(x))$, il suit :

$$\forall x \geq 1, u'(x) = G'(x) - G'(x-1) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1)) = \ln\left(\frac{f(x)}{f(x-1)}\right) = \ln(x) \geq 0$$

- Il faut maintenant prouver $\frac{1}{|u_n|} \rightarrow 0$ qui équivaut par positivité, à prouver $u(n) \rightarrow +\infty$. **Il suffit** de prouver $\lim_{+\infty} u(x) = +\infty$. On a déjà vu u croissante, donc elle admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$ (théorème du cours sur les fonctions monotones), mais ce n'est pas suffisant. Il suffit de minorer comme ceci, en utilisant la croissance de f et du logarithme :

$$u(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(t)) dt \geq \int_{x-1}^x \ln(f(x-1)) = (x - (x-1)) \ln(f(x-1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(+\infty) = +\infty$$

- Reste la positivité de $u(n)$ qui est vraie à partir d'un certain rang, car $u_n \rightarrow +\infty$ d'après l'item précédent

Pour montrer que $f \nearrow$, on applique le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre, en établissant $f'(x) \geq 0$. Je le fais rapidement $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(t) t^x e^{-t}$ (**Attention !** à bien dériver **par rapport à x** : $t^x = e^{x \ln(t)}$). Je ne vérifie que la domination :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(t)| t^x e^{-t} \leq \begin{cases} |\ln(t)| t^b e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ |\ln(t)| t^a e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \end{cases} = \xi(t)$$

ξ est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme plus haut. $f'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^x e^{-t} dt$.

Bon c'est raté! La fonction-intégrande n'est pas positive (ce qui ne prouve rien d'ailleurs) car $\ln t \leq 0$ sur $[0, 1]$.

Il faut être plus subtil, cela devient difficile. On utilise le théorème C^2 et on prouve de la même manière que l'on peut dériver 2 fois sous le signe somme, soit $f''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2 t t^x e^{-t} dt$ **mais ici** la fonction intégrande est positive, donc $f''(x) \geq 0$. On en déduit d'abord f **convexe**, cad f' croissante. f' ne peut donc s'annuler au plus une fois. Or on a établi $f(0) = 0! = 1$ et $f(1) = 1! = 1$. Le théorème de Rolle amène que f' s'annule sur $]0, 1[$. Par conséquent $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. On termine : f est croissante donc admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$. Comme $f(n) = n!$, ce ne peut être que $+\infty$.

CCINP PSI 2023-2015-2009 | IMT PSI 2022 | Ensam 2017 (intégrale à paramètre)

ENONCÉ 132 Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$.

- 1) Montrez que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Calculez $f'(x)$. [**Autres** : Pas calcul de $f'(x)$]
- 2) Calculez $f(x)$ pour tout x réel. [**certains** : En déduire]
- 1) [**Ensam** : Seulement calculer f mais résultat donné]

1) On montre d'abord f définie. De toute façon on ne peut y échapper, c'est le 1^{er} élément du théorème C^1 qu'il faut démontrer de toute façon (voir en dessous).

- $t \rightarrow e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$ est **continue** sur $]0, +\infty[$, et, ce **pour tout** x réel.

- **Etude en $t = 0$** $|g(x, t)| \sim_{t=0} 1 \times \frac{xt}{t} = x$, donc prolongement par continuité en $t = 0$ d'où l'intégrabilité en $t = 0$ et ce, **pour tout x** .
- **Etude en $t = +\infty$** : $0 \leq |g(x, t)| \leq e^{-t} \frac{1}{t}$ puis on applique, par encadrement, le critère $t^2 g(x, t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Intégrabilité en $t = +\infty$ **pour tout x réel**

De l'intégrabilité de $t \rightarrow g(x, t)$ sur $]0, +\infty[$ pour tout x réel, résulte que f est bien définie pour $x \in \mathbb{R}$.

On applique le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre avec $I =]0, +\infty[$, $J = \mathbb{R}$, $g(x, t) = e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t}$. g est C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ donc on peut dériver partiellement sur cet ouvert $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$

- $\forall x \in J$, $t \rightarrow g(x, t)$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$: traité au-dessus
- $\forall x \in J$, $t \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \rightarrow g(x, t)$ est C^1 sur J .
- **Hypothèse de Domination sur tout segment $[a, b] \subset J$** :

$$\forall x \in [a, b] \subset J, \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| e^{-t} \cos(xt) \right| \leq e^{-t} = \xi(t)$$

ξ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$: continuité et critère $t^2 h(t)$ en $t = +\infty$.

Alors f est de classe C^1 , continue et définie sur J . $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \Re(e^{ixt}) dt \stackrel{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \Re(e^{-t} e^{ixt}) dt \stackrel{(2)}{=} \Re \left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt \right) \\ &= \Re \left[\frac{e^{(ix-1)t}}{ix-1} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \Re \left(\frac{-1}{ix-1} \right) = \Re \left(\frac{ix+1}{x^2+1} \right) = \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

- (1) e^{-t} est réel
- (2) Pour toute intégrale convergente complexe $\Re(\int_I f) = \int_I \Re f$
- (3) Il faut justifier proprement la limite complexe en $+\infty$. Je rappelle $h(t) \rightarrow 0$ ssi $|h(t)| \rightarrow 0$. Or ici $|e^{(ix-1)t}| = |e^{ixt} e^{-t}| = e^{-t}$ (**car ixt réel**) $\rightarrow 0$

2) On en déduit $f(x) = \arctan x + cste$. Or, on se place sur \mathbb{R} qui est un **seul intervalle**, donc la constante est unique et s'obtient, par exemple, par la valeur en 0, puisque $f(0) = 0$, d'où $f(x) = \arctan x$.

IMT PSI 2023-2022 (calcul intégrale)

ENONCÉ 141

- 1) Donnez un équivalent de $\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) Nature et calcul de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$ [2022 : indication : utilisez un $\varepsilon > 0$ et le faire tendre vers $+\infty$ à la fin.]

1) On a immédiatement par le dl usuel de \arctan en 0, $\frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$

2)

- $f : t \rightarrow \frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t}$ **continue** sur $[1, +\infty[$

- **Etude en $t = +\infty$** : D'après Q1, f étant positive en $+\infty$ on peut appliquer le critère d'équivalent et par critère de Riemann, f **intégrable** en $+\infty$.

Il en résulte f **intégrable** sur $[1, +\infty[$ d'où la convergence absolue, donc convergence de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_1^\varepsilon \left(\frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t} \right) dt &= \int_1^\varepsilon \frac{dt}{t} - \int_1^\varepsilon \arctan \frac{1}{t} dt \stackrel{(1)}{=} \int_1^\varepsilon \frac{dt}{t} - \left[t \arctan \frac{1}{t} \right]_1^\varepsilon + \int_1^\varepsilon \frac{-t dt}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi}{4} - \varepsilon \arctan \frac{1}{\varepsilon} + \int_1^\varepsilon \frac{dt}{t(1+t^2)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t} \right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \end{aligned}$$

- (1) On effectue une IPP avec $u' = 1$ $v = \arctan \frac{1}{t}$ $u = t$ $v' = \frac{-1}{1+t^2}$
- (2) On fait tendre $\varepsilon \rightarrow +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ existant (immédiatement par le critère de Riemann) et $\varepsilon \arctan \frac{1}{\varepsilon} \sim_{+\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$

On termine en calculant l'intégrale à l'aide d'une décomposition en éléments simples

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_1^A = \frac{1}{2} \ln 2 + \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A^2}{1+A^2} \right) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan \frac{1}{t} \right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

Navale PSI 2023 | BQCCP MP ->2022 | Mines-Ponts PSI 2018 (étude fonction-intégrale)

ENONCÉ 145 Soit $f : x \rightarrow \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.

- 1) Précisez le domaine de définition et de continuité de f .
- 2) Montrez que f est prolongeable en 0 et en 1.
- 3) [Mines : Montrez que le prolongement continu de f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^{+*} mais pas sur \mathbb{R}^+ .]

1) Rappelons le théorème fondamental de l'analyse : si f continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \rightarrow \int_a^x f$ est définie, continue et même C^1 sur I et sa dérivée est $f(x)$. si en outre f est C^k , alors F est C^{k+1} .

Ici, la fonction est $\frac{1}{\ln t}$ continue et C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[= I \cup J$; par suite en prenant $a = \frac{1}{2}$ sur I (ou $a = \frac{3}{2}$ sur J), (**Attention!** on ne peut pas prendre 0 et il faut prendre un a différent sur chaque intervalle),

$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\ln t}$ est C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$. Par Chasles,

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_1^x \frac{dt}{\ln t} = F(x^2) - F(x)$$

On en déduit que f est **continue** sur $I \cup J$ et même C^∞ .

2) f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^+ ssi elle admet des limites **finies** en 0 et 1.

Etude en $x = 0$:

En $x = 0$, on utilise le théorème des accroissements finis : G est dérivable sur $[x, x^2]$, par conséquent il existe $x < c < x^2$ tel que $f(x) = G(x^2) - G(x) = (x^2 - x)G'(c) = \frac{x^2 - x}{\ln c}$. Un encadrement donne :

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln x} = \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

Comme $\lim_0 \frac{x^2 - x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$, on en déduit $\lim_0 f = 0$.

Etude en $x = 1$: Cette méthode ne « marche » pas pour $x = 1$, le lecteur vérifiera qu'on encadre par 2 limites différentes $\frac{1}{2}$ et 1. On va utiliser la méthode du développement : On développe $\frac{1}{\ln t}$ au voisinage de 1 : on pose $u = t - 1$ puis

$$\frac{1}{\ln t} = \frac{1}{\ln(1+u)} = \frac{1}{u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)} = \frac{1}{u} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + o(u)} = \frac{1}{u} \left(1 + \frac{1}{2}u + o(u)\right) = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + o(1)$$

Comme lorsque $x \rightarrow 1$, le segment $[x, x^2]$ est dans un voisinage de 1 aussi proche « que l'on veut » on **peut remplacer** la fonction par son développement à l'intérieur de l'intégrale :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + o(1)\right) dt = \left[\ln|t-1|\right]_x^{x^2} + \frac{1}{2}(x^2 - x) + \int_x^{x^2} o(1) dt = \underbrace{\ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|}_{=\ln(x+1) \rightarrow \ln 2} + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2-x)}_{\rightarrow 0} + k(x)$$

Montrons $\lim_1 k(x) = 0$ et on aura prouvé $\lim_1 f(x) = \ln 2$. Par définition, pour t assez proche de 1, $|o(1)| < \varepsilon$. Donc pour x assez proche de 1, on peut écrire $|k(x)| \leq \int_x^{x^2} \varepsilon dt = (x^2 - x)\varepsilon < 1 \times \varepsilon$ puisque $x^2 - x \rightarrow 0$. Le résultat est donc acquis : $\lim_1 f = \ln 2$

3) Je rappelle le résultat suivant, souvent appelé « *théorème du prolongement* » C^1 : si f est continue sur un intervalle I mais seulement C^1 sur $I - \{a\}$ **et que** $\lim_a f'(x)$ existe et est finie (et vaut ℓ) alors f est C^1 sur I (et on a $f'(a) = \ell$). On a aussi l'extension suivante : si $\lim_a f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est **pas dérivable** en a .

Si, par contre, la limite de f' **n'existe pas** en a , on ne peut **pas conclure** quant à la dérivabilité en a .

On a ici f continue sur \mathbb{R}^+ et C^1 sur $D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ puisque $f(x) = G(x^2) - G(x)$ amène

$$f'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$$

On a immédiatement $\lim_0 f' = +\infty$ et par un équivalent simple en 1, $\lim_1 f'(x) = \lim_1 \frac{x-1}{x-1} = 1$. Par conséquent, f (prolongée à \mathbb{R}^+) est C^1 sur \mathbb{R}^{+*} , et n'est pas dérivable en 0_+ .

Centrale PSI 2023 (développement asymptotique suite-intégrale) *

ENONCÉ 147 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} dt$.

- 1) Justifiez que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Montrez $u_n \rightarrow 0$
- 3) Pour tout n , exprimez u_n sous forme de somme d'une série.
- 4) Trouvez un équivalent de u_n lorsque $u_n \rightarrow +\infty$. [2023bis : DA]
- 5) [2023bis : Déterminez la nature de $\sum u_n$ (Bonus).]

1) La continuité de $f_n(t) = \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2}$ sur $]0, 1[$, jointe à $|f_n(t)| \sim_1 \frac{1 \times (1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2}$, donc prolongement par continuité en 1, et $|f_n(t)| \sim_0 t^{n+1} \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ (critère de Riemann) amène l'intégrabilité sur $]0, 1[$ puis l'existence de l'intégrale

u_n .

2) On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue : la suite de fonctions (f_n) converge simplement clairement sur $]0, 1[$ vers la fonction nulle et la domination $|f_n(t)| \leq \frac{t \ln t}{1-t^2} = |f_1(t)|$, intégrable sur $]0, 1[$ amène le résultat : $\lim u_n = 0$

3) Il faut développer en série la fonction-intégrande. On va utiliser le DSE $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ pour $0 \leq u < 1$ ($R = 1$)

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} \stackrel{(1)}{=} \int_{]0,1[} \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} = \int_{]0,1[} \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k+n+1} \ln t \, dt \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} t^{2k+n+1} \ln t \, dt \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+2+2k)^2}$$

- **(1) Attention !** le DSE n'est pas vrai en $t = 1$ (la série entière diverge)
- **(2)** Théorème d'intégration terme à terme valide avec $g_k(t) = t^{2k+n+1} \ln t$ car :
 - Les g_k sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, 1[$: continue sur $]0, 1[$ et $o_0(\frac{1}{\sqrt{t}})$.
 - La série de fonctions $\sum_k g_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ (Cela vient du DSE!) et sa somme est **continue par morceaux** sur $]0, 1[$.
 - La série numérique $\sum_k \int_{]0,1[} |g_k|$ converge car c'est $\sum_k \frac{1}{(n+2+2k)^2}$ (je ne mets pas le détail du calcul élémentaire par ipp)
- **(3)** Je ne mets pas le détail du calcul élémentaire par ipp, exactement le même que au-dessus, au signe près ($\ln t \leq 0$ pour $t \leq 1$)

4) On effectue un DA de u_n à une précision suffisante pour déterminer la convergence de la série $\sum u_n$ (un petit- o d'une série positive convergente) (on parle de précision plutôt que d'ordre quand ce n'est pas un dl).

Méthode 1 : Le développement en série de Q3 est là pour nous aider : cela donne l'idée d'effectuer une comparaison série-intégrale. C'est possible car $h : t \rightarrow \frac{1}{(n+2t)^2}$ décroît visiblement (**Attention !** à ne pas se tromper de variable entre le n et le k). Je ne mets pas de détails (on encadre la somme partielle **puis** on passe à la limite, c'est plus propre que de manier tout de suite la série et l'intégrale avec $+\infty$) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(n+2t)^2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+2+2k)^2} = u_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(n+2t)^2}$$

Ensuite $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(n+2t)^2} = \frac{1}{2n}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(n+2t)^2} = \frac{1}{2(n+2)}$. Par conséquent $u_n \sim -\frac{1}{2n}$, ce qui permet de conclure immédiatement à la divergence de la série.

Méthode 2 : On demandait un DA, on a bien un, mais à un terme, c'est un peu frustrant... On va essayer d'augmenter la précision.

Considérons la fonction $k(t) = \frac{t \ln t}{1-t^2}$, de classe C^∞ sur $]0, 1[$, se prolongeant en une fonction continue (encore notée k) sur $[0, 1]$ (limites finies au bord). Mais elle n'est pas dérivable en 0 : $k(t) \sim_0 t \ln t$ et si $t \ln t = at + o(t)$ il y a une contradiction. On va avoir besoin d'une fonction 3 fois dérivable (et même C^3) pour appliquer la formule de Taylor, aussi on va plutôt prendre $k(t) = \frac{t^4 \ln t}{1-t^2}$

Etude en 1 : Le changement $u = t - 1$ amène à $k(1 + u) = -\frac{(u+1)^4}{u+2} \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui par le développement en série entière (en 0) sur $] -1, 1[$ de chacune des 2 fractions, et produit de Cauchy, nous donne, en particulier que $u \rightarrow k(1 + u)$ est C^∞ sur $] -1, 0[$ et donc k est C^∞ sur tout $] 0, 1]$, soit C^∞ dans un voisinage de 1.

Etude en 0 : Comme $k(t) \sim_0 t^4 \ln(t) = o(t^3)$ (**mais pas un** $o(t^4)$). **Attention !**, on n'en déduit pas k 3 fois dérivable seulement 1 fois, mais, tout au moins, si elle l'est, les dérivées valent toutes 0. On applique une récurrence (jusqu'à 3) pour démontrer $k \in C^3$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. Je vous traite la dernière étape : si on a déjà démontré C^2 , on calcule, par Leibniz $k'''(t) = 1 \times 4! t \ln(t) + 3 \times 12 t^2 \frac{1}{t} + 3 \times 4 t^3 \frac{-1}{t^2} + 1 \times t^4 \frac{2}{t^3} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, ce qui prouve par le théorème de Sup de prolongement C^1 que k est C^3 sur $[0, \frac{1}{2}]$ (et $k'''(0) = 0$).

k (son prolongement) est C^3 sur $[0, 1]$, on applique la formule de Taylor sur $[y, 1]$ à l'ordre 3 avec reste intégral. On l'applique donc « en » : 1. Pourquoi? parce que le « poids » de l'intégrale est en 1 : la fonction-intégrande est très proche de 0 quant $t = 0$ et x proche de l'infini alors qu'elle est proche de $-\frac{1}{2}$ quand t est voisin de 1.

$$\forall 0 \leq y \leq 1, k(y) = k(1) + (y-1)k'(1) + \frac{(y-1)^2}{2!} k''(1) + \int_1^y \frac{(y-t)^2}{2!} k'''(t) dt = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(y-1) - \frac{17}{12}(y-1)^2 + \zeta(y)$$

$k(1) = -\frac{1}{2}, k'(1) = -\frac{3}{2}, k''(1) = -\frac{17}{6}$, par le dl en 1, c'est plus rapide que de dériver 3 fois! Je ne mets pas les détails.

k''' continue sur $[0, 1]$ est bornée par M_3 et par suite :

$$\forall 0 \leq y \leq 1, \left| \zeta(y) \right| \leq \int_y^1 \left| \frac{(y-t)^2}{2!} k'''(t) \right| dt \leq M_3 \left[\frac{-(y-t)^3}{3!} \right]_{t=y}^{t=1} = M_3 \frac{(1-y)^3}{6} = M_3' (1-y)^3$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 \frac{t^{x+1} \ln t}{1-t^2} dt = \int_0^1 t^{x-3} k(t) dt = \int_0^1 t^{x-3} \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(t-1) - \frac{17}{12}(t-1)^2 \right) dt + \int_0^1 t^{x-3} \zeta(t) dt \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{-17/12}{x} + \frac{4/3}{x-1} + \frac{-5/12}{x-2} + \int_0^1 t^{x-3} \zeta(t) dt \stackrel{(2)}{=} \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \int_0^1 t^x \zeta(t) dt \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{2}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) + O\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

- (1) Par simple primitivation...
- (2) Dl en $+\infty$ à l'ordre 4, on pourrait faire plus, faire moins, regarder après pour deviner l'ordre optimum.

Je ne mets pas les détails : calcul fastidieux que j'ai réalisé à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

- (3) $\left| \int_0^1 t^x \zeta(t) dt \right| \leq M_3' \int_0^1 t^x \frac{(1-t)^3}{3} = M_3' \left(\frac{-1/3}{x+4} + \frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x+2} + \frac{1/3}{x+1} \right) = M_3' \left(\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \right) = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Finalement $u_n = \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Mines-Ponts PSI 2023 (limite suite-intégrale à indéterminée) *

ENONCÉ 148 Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1], [0, 1])$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $x \in [0, 1], |\varphi'(x)| < 1$. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(\varphi^n(x)) dx$.

En posant $g(x) = \varphi(x) - x$ dérivable, il vient $g'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$, soit g strictement décroissante sur $[0, 1]$. On

a $g(0) = \varphi(0) \geq 0$ et $g(1) = \varphi(1) - 1 \leq 0$. g continue est donc bijective de $[0, 1]$ sur $[g(1), g(0)] \ni 0$ et par suite, il existe un unique réel $\ell \in [0, 1]$ tel que $g(\ell) = 0$, soit $\varphi(\ell) = \ell$. Conformément à un résultat usuel, toute suite récurrente $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ ne peut converger que vers ce point fixe, mais elle « pourrait » ne pas converger. C'est donc le cas de $\varphi^n(x)$ pour tout x (qui doit être pris dans le sens $(\varphi \circ \dots \circ \varphi)(x)$ car sinon le sens $(\varphi(x))^n$ est trop « facile » à étudier).

Comme f' est **continue** sur le **segment** $[0, 1]$, l'hypothèse $|\varphi'(x)| < 1$ s'écrit plus fortement $|\varphi'(x)| \leq M < 1$ (où d'ailleurs M peut être une borne atteinte). L'inégalité des accroissements finis amène alors $|\varphi(x) - \varphi(\ell)| = |\varphi(x) - \ell| \leq M|x - \ell|$ puis par récurrence immédiate, $|\varphi^n(x) - \ell| \leq M^n|x - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La convergence vers ℓ est donc établie.

On termine par le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec $f_n(x) = f(\varphi^n(x))$:

- **Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$:**

$f_n(x) \rightarrow f(\ell) = \ell$ par continuité de f .

- **Hypothèse de Domination sur $[0, 1]$:**

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M_0 = \xi(x)$$

M_0 est la borne sup de $|f|$ continue sur le segment $[0, 1]$. ξ est **intégrable** sur $[0, 1]$: constante sur un intervalle borné.

Par application du théorème $\lim \int_0^1 f(\varphi^n(x)) dx = \int_0^1 \ell = \ell$

Remarque : Toute fonction continue φ du segment $[0, 1]$ dans lui-même admet un point fixe (par le tvi). Ici l'hypothèse C^1 , jointe à la majoration, rajoute l'unicité du point fixe ℓ (par la bijection).

CCINP PSI 2023 (limite suite-intégrale)

ENONCÉ 149

1) $f_n(x) = \frac{(1 + \frac{x}{n})^n - 1}{x}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Montrez I_n bien définie.

2) Montrez $I_n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$

1)

- f_n est continue sur $]0, 1]$, pour tout $n \geq 1$ entier naturel.
- **Etude en $x = 0$:**

Attention ! à ne pas se tromper de variable! Ici, $x \rightarrow 0$ donc $\frac{x}{n} \rightarrow 0$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \left(\frac{x}{n} + o(x) \right) \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\exp \left(x + o(x) \right) - 1 \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$$

f_n est donc prolongeable par continuité en 0 (valeur 1) d'où f_n intégrable en 0.

f_n est intégrable sur $]0, 1]$ donc l'intégrale converge absolument donc converge, cad existe.

2) Il y a quand même un (petit) problème dans cet énoncé, qui pourrait vous perturber, c'est que à gauche de la flèche, le n est la variable, tandis qu'à droite, c'est une variable muette... C'est peut-être juste un problème de

report d'énoncé, mais ce n'est pas très grave et n'empêche pas de comprendre l'énoncé

On procède simplement en 2 étapes, on effectue la limite en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue puis on développera en série « l'intérieur » de l'intégrale obtenue après limite, pour procéder à une intégration terme à terme de la série.

• **Etude de la convergence simple de la suite de fonctions** (f_n) **sur** $]0, 1[$:

On reprend le développement vu plus haut mais **Attention !** ici la variable est n : comparez bien avec en haut ce qui change :

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) - 1 \right) = \frac{1}{x} \left(\exp \left(x + o(1) \right) \right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = f(x)$$

• **Hypothèse de Domination sur** $]0, 1[$:

$$\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f_n(x) \right| = \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) - 1 \right) \leq \frac{1}{x} \left(\exp \left(n \times \frac{x}{n} \right) - 1 \right) = \frac{e^x - 1}{x} = \xi(x)$$

Attention ! à bien justifier cette majoration! On a appliqué une inégalité usuelle de convexité $\ln(1 + u) \leq u$ et l'on a appliqué de bon droit à **intérieur** de exponentielle car l'exp est **croissante!**

ξ est **intégrable** sur $]0, 1[$: continuité sur $]0, 1[$ et $\xi(t) \sim_0 \frac{x}{x} = 1$

Le théorème s'appliquant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$

On développe en série f de manière élémentaire en utilisant le DSE de l'exponentielle valide sur \mathbb{R} car le rayon vaut $R = +\infty$

$$\forall x \neq 0, \frac{e^x - 1}{x} dx = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} dx \stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$$

- (1) On applique le théorème d'intégration terme terme avec $g_n(x) = \frac{x^n}{(n+1)!}$
 - Les g_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, 1]$ (par continuité sur un **segment**)..
 - La série de fonctions $\sum_n g_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ puisque c'est le développement en série et sa somme est **continue par morceaux** sur $[0, 1]$.
 - La série numérique $\sum_n \int_{[0,1]} |g_n|$ converge car c'est la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$ qui converge par le critère d'Alembert

CCINP PSI 2023 🍷 (calcul d'intégrale)

ENONCÉ 151 On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t) dt$.

- 1) Montrez que I converge.
- 2) Montrez $J = 2I$
- 3) Calculez I .

1) En posant $f(t) = \ln \sin t$:

- f est **continue** sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. **car on a bien** $\sin t > 0$ sur cet intervalle.

- **Etude en $t = 0$** : Dans un voisinage de $t = 0$, on écrit :

$$|f(t)| = \left| \ln \left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3) \right) \right| = \left| \ln \left(t \left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right) \right) \right| = \left| \ln t + \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right)}_{\rightarrow 0} \right| = \left| \ln t - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2) \right| \sim_0 |\ln t|$$

De l'intégrabilité de \ln en 0 (cours ou critère $t^a g(t)$), il résulte du **critère d'équivalent** des fonctions **positives** que f est **intégrable** aussi en 0.

f est donc intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, d'où l'intégrale I converge absolument, donc converge (cad existe).

- 2) Le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ $du = -dt$, C^1 et **bijectif** de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ amène :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt = \int_{\pi/2}^0 \ln \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\pi/2} \ln \cos u \, du \quad \text{Ensuite, on écrit :}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \times \cos t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t + \ln \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt + \int_0^{\pi/2} \ln \cos t \, dt = 2I$$

3)

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \times \cos t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{2} \sin(2t) \right) \, dt = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{1}{2} \right) \, dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) \, dt \stackrel{(1)}{=} -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) \, du$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) \, du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) \, du \right) \stackrel{(2)}{=} -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left(I + \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi - v)) \, (-dv) \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left(I + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v)) \, dv \right) = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} (2I) \implies I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

- (1) On a effectué le changement de variables $u = 2t$ licite car C^1 et bijectif de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $]0, \pi]$
- (2) On a effectué le changement de variables $v = \pi - u$ licite car C^1 et bijectif de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

CCINP PSI 2023 🧑 -2022 🧑 -2021 🧑 (fonction-intégrale)

ENONCÉ 152

1) Donnez le domaine de définition de $F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt$

2) Montrez, pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3) Montrez, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x) \ln(x)$. On rappelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

[2021-2022 : Indication : on pourra procéder à une intégration par parties] .

1) **Attention !** à bien raisonner par rapport à t **mais sans négliger** le rôle de x . La fonction $f(t) = \frac{\ln(1-t)}{t}$ n'existe que pour $1-t > 0$ et $t \neq 0$, soit $t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

Méthode 1 : D'après le cours, l'existence de l'intégrale **nécessite au moins** que l'intervalle $]0, x[$ vérifie $]0, x[\subset]-\infty, 0[\cup]0, 1[$. Je vous laisse réfléchir au fait que ceci **impose** $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[= D$.

- f est **continue** sur $]0, x[$, d'après la remarque au dessus
- **Etude en $t = 0$** :

$$f(t) \sim_0 \frac{-t}{t} = -1, f \text{ se prolonge en une fonction continue en } 0, \text{ donc intégrable en } 0; \text{ et ce, } \textbf{pour tout } x \in D.$$

- **Etude en $t = x$** :

La fonction f est continue en x si $x \neq 1$, par conséquent on étudie que le cas $x = 1$, soit l'étude en $t = 1$.

Le changement de variables $u = 1 - t$ amène $f^*(u) = \frac{\ln u}{1-u} \sim_{u=0} \ln u$ intégrable en 0, c'est du cours! Donc f **intégrable** en 1, **pour tout** $x \in D$

f est donc **intégrable** sur $]0, x[$, pour tout $x \in D$, donc l'intégrale F est bien définie soit $\text{Def } F = D$

Méthode 2 : On peut s'y prendre un peu mieux : comme $f(t) \sim_0 -1$, f peut se prolonger en une fonction continue sur $J =]-\infty, 1[$ que l'on notera \hat{f} pour ne pas « tricher » avec les raisonnements. On sait alors, théorème fondamental de l'Analyse de Sup, que $G : x \rightarrow \int_0^x \hat{f}(t) dt$ est définie et même continue, dérivable, C^1 sur I , c'est la primitive de \hat{f} qui s'annule en 0. Or comme \hat{f} et f sont continues par morceaux et ne diffèrent que d'un point, on sait $F(x) = G(x)$

Remarque : On s'aperçoit que la 2^e méthode ne donne pas tout à fait le même domaine : il y a 0 en plus ... En fait dans la première méthode on peut montrer que F se prolonge par continuité en 0. Et d'ailleurs aussi en 1, puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge. Bref, on pourrait dire $\text{Def } F =]-\infty, 1]$. Tout ceci est complexe.

2) Par la 2^e méthode F est dérivable sur J et $F'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$. On a immédiatement le DSE sur $] -1, 1 [$:

$$\forall x \in] -1, 1 [, F'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \implies F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Attention !, Reste la valeur en 1. Une « histoire » de continuité, on passe à la limite lorsque $x \rightarrow 1$, mais on justifie **proprement** son existence des 2 côtés de l'égalité :

- la série entière est continue en 1, puisqu'il y a convergence normale sur $[0, 1]$: $\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$.
- Quant à la fonction F , elle n'est pas définie en 1, il faut la prolonger par continuité ce qui est possible puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge, déjà dit dans la remarque.

3) Il faut penser à dériver :

$$(F(x) + F(1-x))' = F'(x) - F'(1-x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \ln x = (-\ln(x) \ln(1-x))'$$

Comme $]0, 1[$ est **un intervalle**, les deux fonctions diffèrent à une constante près : On prend la valeur en 0 (ou la limite par continuité) : $\ln(1-x) \ln(x) \sim_0 -x \ln(x) \rightarrow 0$ et $(F(x) + F(1-x))(0) = F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Remarque : L'indication (pas en 2023!) d'effectuer une IPP n'est donc pas nécessaire.

VIII — ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Mines-Ponts PSI 2023-2022 (convergence suite de polynômes) *

ENONCÉ 155 Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_{\infty [0,1]}$, et E un \mathbb{R} -ev muni de 2 normes N_1 et N_2

1) On suppose N_1 et N_2 équivalentes et (u_n) une suite de E qui converge pour N_1 . Montrez que (u_n) converge pour N_2 .

2) On suppose qu'une suite (u_n) cvg dans (E, N_1) ssi elle cvg dans (E, N_2) . Montrez N_1 et N_2 équivalentes [2022 : Quest. absente]

3) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

4) Soient $a, b \in [0, 1]$. Montrez N_a et N_b normes équivalentes.

5) Pour quelles valeurs de a , la suite des $P_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

6) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$. [2022 : Quest. absente]

1) Question de cours. Je ne redémontre pas ici.

2) L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates, je vous laisse les traiter. Quant à la séparation, si $N_a(P) = 0$, par positivité on a $P(a) = 0$ et $\|P'\|_{\infty} = 0$ soit $P' = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui entraîne P constante-nulle sur $[0, 1]$ et donc sur \mathbb{R} (infinité de racines), c'est bien le polynôme nul.

3) De l'égalité $P(b) = P(a) + \int_a^b P'$, on tire $|P(b)| \leq |P(a)| + \|P'\|_{\infty}$ (**Attention !** pour $0 \leq a, b \leq 1$ car c'est la norme sup sur $[0, 1]$). Il suit alors $N_b(P) \leq |P(a)| + 2\|P'\|_{\infty} \leq 2N_a(P)$. Par symétrie des lettres, on tire $N_a(P) \leq 2N_b(P)$, d'où l'équivalence des 2 normes.

4) On a $N_a(P_n) = \left|\frac{a}{2}\right|^n + \frac{n}{2^n}$.

- Si $|a| < 2$, $\lim N_a(P_n) = 0$, soit $\lim P_n = 0$ pour la norme N_a .
- Si $|a| > 2$, $\lim N_a(P_n) = +\infty$ donc la suite (P_n) diverge pour la norme N_a (rappel : si x_n converge vers x pour la norme $\|\cdot\|$, alors $\|x_n\|$ converge vers $\|x\|$)
- Si $a = \pm 2$, $\lim N_a(P_n) = 1$. On ne peut conclure (par cette méthode!) quant à la convergence de cette suite. Seulement : si elle converge, elle converge vers un polynôme de norme 1. On constate $N_a(P_n - 1) = \left|\left(\frac{a}{2}\right)^n - 1\right| + \frac{n}{2^n} \rightarrow 1$ si $a = 2$, soit la suite (P_n) converge vers le polynôme-constant 1 pour N_a . Si $a = -2$, on constate que la sous-suite (P_{2n}) converge vers 1 et la sous-suite (P_{2n+1}) vers -1, il n'y a donc pas de limite.

XPSI 2023 (fermeture matrices trigonalisables) *

ENONCÉ 156

1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire avec $n \geq 2$. Montrez que P est scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$

2) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

1) Si P est scindé sur \mathbb{R} , de racines a_i réelles comptées avec la multiplicité, (on pose $z = x + iy$) :

$$|P(z)| = \left| \prod_{i=1}^n (z - a_i) \right| = \prod_{i=1}^n |z - a_i| = \prod_{i=1}^n \sqrt{(x - a_i)^2 + y^2} \geq \prod_{i=1}^n \sqrt{y^2} = |y|^n = |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$$

Réciproquement, soit P un polynôme non scindé sur \mathbb{R} . Alors il possède une racine complexe ω . Pour $z = \omega$, $|P(z)| = 0 < |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$, **puisque** $\operatorname{Im} z \neq 0$. La propriété n'est pas vérifiée.

2) Rappelons qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé, donc c'est toujours vrai dans \mathbb{C} mais vrai dans \mathbb{R} ssi χ_A , unitaire de degré n , est scindé dans \mathbb{R} . La question précédente amène $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C}, |\chi_A(z)| \geq |\Im z|^n$.

Considérons l'application $\varphi_z : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow |\chi_A(z)| - |\Im z|^n \in \mathbb{C}$. Elle est **continue** car $A \rightarrow \det(A - zI)$ l'est comme polynôme homogène de degré n en les n^2 coefficients de A (à z fixé). Par conséquent $F_z = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi_z(A) \geq 0\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble demandé est l'intersection de la famille **infinie** des fermés $(F_z)_{z \in \mathbb{C}}$, donc l'est aussi. **Attention!**, seule une union **finie** de fermés est un fermé.

Remarques

- **Attention!** à l'expression fermé ou ouvert : si U est un ouvert **de** E et $E \subset F$, U n'est pas nécessairement un ouvert **de** F , donc il faut préciser le **de...** sauf dans le cas où l'on prend l'ev E tout entier. C'est heureusement souvent le cas. Par exemple $[0, 1[$ est un ouvert de $[0, 2[$, mais, évidemment, **pas de** \mathbb{R} .
- L'ensemble des polynômes **unitaires** de degré n **scindés** sur \mathbb{R} est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après cet exercice. Comme réunion finie de fermés, l'ensemble F_n de **tous** les polynômes scindés sur \mathbb{R} (et constants) est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.
- L'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines **simples** réelles est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$, pas si simple à démontrer. Par contre, L'ensemble de tous les polynômes scindés à racines **simples** réelles (degré $\leq n$) n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour $n \geq 3$). Il suffit de considérer la suite de polynômes $X(1 + \frac{1}{k}X^2)$ (je vous laisse réfléchir pourquoi elle le prouve).
- L'ensemble de tous les polynômes (de $\deg \leq n$) scindés à racines simples complexes est, lui, ouvert et même dense dans $\mathbb{C}_n[X]$
- Si on se pose le même problème, ouvert? fermé? pour ces ensembles **dans** l'ev $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$), cela n'a pas de sens, pourquoi?

Mines-Ponts PSI 2023 (suite de matrices) ✨

ENONCÉ 157 Soit $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}$. On suppose que la suite (A^n) converge. Trouvez sa limite.

On suppose $A^n \rightarrow P$. On sait que A^n converge toujours vers une (matrice de) projection, puisque $A^{2n} = A^n A^n \rightarrow P^2$ et $\rightarrow P$, comme suite extraite, et on applique l'unicité de la limite.

On calcule $A^2 = (y - x)I + xJ$ avec J la matrice constituée de 1, $y = p^2 + q^2 + r^2$, $x = pq + pr + qr$. Par suite, en appliquant le binôme de Newton, car I commute avec J (**Attention!** $J^k = 3^{k-1}J$, **seulement** pour $k \geq 1$):

$$A^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k J^k (y-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n x^k (y-x)^{n-k} 3^{k-1} J + (y-x)^n I = \frac{1}{3} ((y+2x)^n - (y-x)^n) J + (y-x)^n I$$

$A^{2n} \rightarrow P = \alpha J + \beta I$, avec, à priori, $\beta \in \{0, 1\}$, $\alpha \in \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\}$, et $A^{2n+1} = A^{2n} A = AA^{2n} \rightarrow P = AP = PA$. Or $AJ = JA =$

$(p + q + r)J = xJ$ d'où :

$$AP = PA = \alpha xJ + \beta A = \alpha J + \beta I = P \quad (1)$$

Il faut distinguer le cas (I, J, A) libre du cas lié. Or (I, J) est libre, donc, cours, (I, J, A) lié ssi A combinaison linéaire de I et J qui impose, en regardant la diagonale, $p = q = r$, et réciproquement, ok.

- Si $p = q = r$, immédiatement $A = pJ$, puis $A^n = \frac{1}{3}(3p)^n J$ qui converge ssi $p = \frac{1}{3}$, et alors vers $\frac{1}{3}J$ (c'est le cas de la suite constante), ou $|p| < \frac{1}{3}$, et alors vers 0.
- Sinon, (I, J, A) libre, ceci impose $\beta = 0$ et $\alpha x = \alpha$, soit ($\alpha = 0$ ou $p + q + r = x = 1$)
 - Si $\alpha = \beta = 0$, comme $\beta = \lim(y - x)^n$, ceci amène $|y - x| < 1$ et ensuite $|y + 2x| < 1$. Réciproquement, $A^{2n} \rightarrow 0$ et $A^{2n+1} \rightarrow 0$. Ok.
 - Si $\beta = 0$ et $x = 1$, ceci amène $|y - 1| < 1$ et $|y + 2| \leq 1$. Ces 2 conditions sont incompatibles.

Remarque :

Examinons de plus près ces conditions : $|y + 2x| = (p + q + r)^2 < 1$, soit $|p + q + r| < 1$ et $|y - x| = |p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - pq| < 1$. On calcule :

$$p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - pq = \left(p - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{3}{4}(q - r)^2$$

Ce procédé s'appelle « réduction de Gauss d'une forme quadratique ». Je vous rassure! Vous n'êtes pas censé le connaître. Si vous êtes curieux, vous pouvez regarder sur Internet, ce n'est pas difficile à comprendre, c'est un procédé de calcul qui peut-être utile. On peut donc enlever la valeur absolue et cette condition, exprimée géométriquement dans un espace de dimension 3, est l'intérieur d'un cylindre (en changeant de repère, dans l'espace, $X^2 + \frac{3}{4}Y^2 = 1$ est un cylindre elliptique). La condition $-1 < p + q + r < 1$ rajoutée, exprimée géométriquement, est donc l'intersection de l'intérieur d'un cylindre et de 2 demi-espaces de dimension 3, une sorte de « tronc de cylindre ».

A noter que le 1^{er} cas particulier, $p = q = r$ avec $|p| \leq \frac{1}{3}$, correspond à l'axe de ce tronc de cylindre.

CCINP PSI 2023-2021 🍷 (limite suite endomorphismes)

ENONCÉ 160 Soit E un ev euclidien [2021 : evn] de dim. finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

- 1) Soit $x \in \text{Ker}(f - Id) \cap \text{Im}(f - Id)$. Montrez il existe y tel que $x = f(y) - y$.
- 2) Déterminez $f^n(y)$ en fonction de x, y et n .
- 3) En déduire $E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$
- 4) [2021 : Emy ne s'en rappelle plus. Il y a un résultat qui demande alors de démontrer que la suite de vecteurs $\frac{1}{n}(x + f(x) + \dots + f^{n-1}(x))$ a pour limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, la projection de x sur $\text{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\text{Im}(f - Id)$. C'est peut-être cela??]

1) Puisque $x \in \text{Im}(f - Id)$, alors $x = f(y) - y$. D'autre part $x \in \text{Ker}(f - Id)$, soit $f(x) = x$. Ceci amène $f^2(y) = f(f(y)) = f(x + y) = f(x) + f(y) = 2x + y$ puis $f^3(y) = f(2x + y) = 2f(x) + f(y) = 3x + y$. On conjecture $f^n(y) = nx + y$ que l'on démontre par récurrence. Je vous laisse le traiter.

2) De la question précédente, on tire $x = \frac{1}{n}(f^n(y) - y)$. On va faire alors des limites. Je rappelle que les limites (dans les evs) n'existent que dans les evns (n comme normé) et qu'elles ne peuvent se prouver proprement que

par l'utilisation des normes justement. Je rappelle entre autres, que $u_n \rightarrow 0$ ssi $\|u_n\| \rightarrow 0$.

L'hypothèse $\|f(y)\| \leq \|y\|$ amène par récurrence immédiate $\|f^n(y)\| \leq \|y\|$. Par suite :

$$0 \leq \|x\| = \left\| \frac{1}{n}(f^n(y) - y) \right\| \leq \frac{1}{n} 2\|y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il vient $x = 0$, soit $\text{Ker}(f - Id) \cap \text{Im}(f - Id) \subset \{0\}$ d'où l'égalité, l'autre inclusion étant immédiate. Le théorème du rang, appliqué à $f - Id$ donne alors l'assertion de l'énoncé : $E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$

3)

IX — ANALYSE : AUTRES

IMT PSi 2023 (équation différentielle)

ENONCÉ 167 Notons $S = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}), \forall x > 0, 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 1\}$

1) Donnez la structure algébrique de S .

2) Trouvez la (les) solution(s) développable(s) en série entière au voisinage de 0.

1) C'est du cours. **Attention !** on n'a pas $= 0$. Si on l'avait : l'ensemble des solutions (de classe C^2) **sur un intervalle** I où le « coefficient dominant » $4x$ ne s'annule pas, est un \mathbb{R} -ev de dimension 2. Ici, dans l'énoncé, $I = \mathbb{R}^{+*}$. **Puisqu'on a** $a = 1$, l'ensemble des solutions sur \mathbb{R}^{+*} est le translaté d'un \mathbb{R} -ev de dimension 2, cad de la forme (dans l'espace des fonctions), $\alpha f(x) + \beta g(x) + h(x)$. L'ajout d'une solution particulière correspond, en fait, à une translation (l'ajout du vecteur \vec{u} correspond à une translation par \vec{u}). On peut d'ailleurs remarquer ici que 1 est une solution particulière évidente.

2) Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $R \neq 0$. On sait alors qu'elle est dérivable terme à terme sur $] -R, R[: y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. y est solution sur $] -R, R[$ ssi :

$$\begin{aligned} 4x \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 1 \\ \Leftrightarrow 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 1 \\ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 4 \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 1 \\ \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} (4(n+1) n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n) x^n &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n \end{aligned}$$

- (1) On ramène toutes les quantités à x^n par translation d'indice (éventuel)
- (2) Ici, « par chance », les valeurs en $n = -1$ sont nulles donc, par chance, tout se ramène à $n = 0$

De l'unicité d'un DSE, il résulte l'égalité des coefficients (**Attention !** au cas $n = 0$ à part qui correspond au 1 à part), soit, pour $n \geq 0$, $2a_1 - a_0 = 1$ et aussi :

$$\forall n \geq 1, 4(n+1) n a_{n+1} + 2(n+1) a_{n+1} - a_n = 0 \implies a_{n+1} = \frac{1}{(4n+2)(n+1)} a_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n$$

On essaye de deviner les coefficients. **Attention !**, on écrit bien le dernier pour voir où s'arrête la récurrence!

$a_2 = \frac{1}{4 \times 3} a_1$: On voit qu'il va manquer le 2 pour la factorielle :

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} a_{n-1} = \dots = \frac{2}{(2n+2)!} a_1 \quad \text{et } 2a_1 = a_0 + 1$$

Il faut vérifier que la série entière existe vraiment, cad que le rayon est non nul. Le critère d'Alembert, par la factorielle, nous donne ici $R = +\infty$, je ne mets pas les détails. Toutes les séries entières solutions sur \mathbb{R} sont donc :

$$y(x) = (a_0 + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} = C \cosh \sqrt{x} - C & \text{si } x \geq 0 \\ C \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{2n}}{(2n)!} = C \cos \sqrt{-x} - C & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Fallait-il calculer la somme de la série entière, comme je viens de le faire? L'examinateur vous le demandera certainement, s'il vous reste du temps...

Remarque : L'ensemble des séries entières solutions **sur** \mathbb{R} (car $R = +\infty$) est donc un \mathbb{R} -ev de dimension 1. Y en a-t-il d'autres, des solutions? On ne peut le dire a priori avec le cours... Par contre, si on se place sur \mathbb{R}^{+*} , il y en a d'autres que celles trouvées ($C \cosh \sqrt{x} - C$) puisque, rappelé en question, les solutions forment un \mathbb{R} -ev de dimension 2. En fait, on trouve aussi les $D \sinh \sqrt{x} + D$ qui, elles, ne sont pas développables en série entière. Voyez-vous pourquoi?

*Centrale PSI 2023 (étude extrema fonction convexe) **

ENONCÉ 168 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^2 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

1) Pour x fixé dans \mathbb{R} on note $\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(tx)$. Montrez φ de classe C^2 et exprimez $\varphi''(x)$ en fonction de la hessienne de f .

2) En considérant la fonction $\psi : t \rightarrow f(tx) - (\vec{\nabla} f(0) | tx) - \frac{1}{2} t^2 x^T x$, montrez l'inégalité $f(x) \geq f(0) + (\vec{\nabla} f(0) | x) + \frac{1}{2} x^T x$.

3) En déduire $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; Montrez f admet un minimum.

1) φ est la composée de $g : t \in \mathbb{R} \rightarrow tx \in \mathbb{R}^n$, immédiatement de classe C^∞ car linéaire, et $f : u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 par hypothèse, elle est donc de classe C^2 .

Comme φ est de classe C^2 , à l'instar d'une fonction d'une variable réelle, on peut « lire » la différentielle en x (notée $df(x)$) et la hessienne en x (notée $Hf(x)$) dans le dl d'ordre 2. Je rappelle que si f est C^2 d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} , pour tout $X = (x_1, \dots, x_n)$ et tout « petit déplacement » $H = (h_1, \dots, h_n)$ (pour que $X + H \in U$) :

$$f(X + H) = f(X) + df(X)(H) + \frac{1}{2} H^T Hf(X) H + o(\|H\|^2)$$

On a par hypothèse, cette égalité. Il vient alors (on note x plutôt X pour la lisibilité **vectorielle**) :

$$\begin{aligned} \varphi(t+h) &= f(tX + hX) = f(tX) + df(tX)(hX) + \frac{1}{2} ({}^T hX) Hf(tX) (hX) + o(\|hX\|^2) \\ &\stackrel{(1)}{=} \varphi(t) + h df(tX)(X) + \frac{1}{2} h^2 X^T Hf(tX) X + \|X\|^2 o(h^2) \end{aligned}$$

- **(1)** Linéarité de la différentielle en un point et « bilinéarité » du produit matriciel $(X, Y) \rightarrow X^T AY$

On peut donc (parce que C^2) « lire » la dérivée première et seconde dans ce **développement limité de φ à l'ordre 2** en t : $\varphi'(t) = df(tx)(x)$ et $\varphi''(t) = x^T Hf(tx) x$ (produit matriciel).

2) En utilisant la question précédente, et en se rappelant que $df(x)(y) = (\vec{\nabla} f(x) | y)$, si on sait son cours sur le gradient. Puis :

$$\psi'(t) = (\vec{\nabla} f(tX) - \vec{\nabla} f(0) | X) - t X^T X \quad \psi''(t) = X^T Hf(tX)X - X^T X = X^T (Hf(tX) - I)X$$

Les valeurs propres de la matrice $A - I$ étant exactement les vps de A moins 1, comptées avec la multiplicité, On en déduit par l'hypothèse de l'énoncé que les vps de la matrice $Hf(tX) - I$ sont toutes positives. Cette matrice étant symétrique (une Hessienne l'est), on a donc plus précisément $Hf(tX) - I \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On en déduit $\psi''(t) \geq 0$, soit ψ convexe sur \mathbb{R} et ψ' croît. On en tire, pour $t \geq 0$, $\psi'(t) \geq \psi'(0) = 0$, donc ψ croît, soit $\psi(1) \geq \psi(0)$ qui nous donne exactement l'inégalité de l'énoncé.

3) En utilisant l'inégalité triangulaire inversée et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(x)| \geq \frac{1}{2} |x^T x|^2 - |(\vec{\nabla} f(0) | x)| - |f(0)| \geq \frac{1}{2} \|x\|_{can}^2 - \|\vec{\nabla} f(0)\| \|x\| - |f(0)| \sim \frac{1}{2} \|x\|_{can}^2$$

On en déduit que $f(x) \rightarrow +\infty$ pour $\|x\| \rightarrow +\infty$.

Si 0 est un minimum de f , Ok. Sinon, il existe un vecteur x_1 tel que $f(x_1) < f(0)$. Puis, par propriété de limite au-dessus, il existe $M > 0$ tel que si $\|x\| \geq M$, alors $f(x) \geq f(0)$. Posons $M' = \max(M, \|x_1\|)$. Considérons alors la boule fermée bornée $B(0, M')$ (qui est un compact). Notons que $x_1 \in B$. On sait alors que la fonction **continue** f y admet un minimum global, mettons en x_0 , donc, pour tout $x \in B$, $f(x) \geq f(x_0)$. En particulier, $f(x_1) \geq f(x_0)$. Si x n'est pas dans la boule, $f(x) \geq f(0) > f(x_1) \geq f(x_0)$. Nous venons d'établir que f présente un minimum global en x_0 .

Remarques

- On peut savoir qu'une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admet au plus un minimum et si elle en admet un, c'est un minimum global. Vous avez du faire cet exo en Sup (Je vous laisse y réfléchir, faites un dessin). On peut démontrer aussi que si $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe nécessairement un minimum global ou aussi que si un réel a vérifie $f'(a) = 0$, c'est nécessairement un minimum global.
- Cet exo généralise un peu ces idées pour une fonction définie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . La définition d'une fonction convexe est la même : $f(tX + (1-t)Y) \leq tf(X) + (1-t)f(Y)$ mais **Attention!**, ici, X, Y sont des vecteurs. On a aussi, si f de classe C^2 , f est convexe ssi la hessienne en tout point est symétrique positive (correspond à la dérivée seconde positive). On peut montrer, de manière analogue, que pour une fonction convexe sur \mathbb{R}^n , s'il existe un point a tel que la différentielle $df(a) = 0$, c'est un minimum global.

ENONCÉ 169 Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$. On définit $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in F$.

1) Montrez $f \in C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$ et vérifie $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$.

2) Montrez f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et calculez-les.

3) f est-elle continue en $(0, 0)$?

1) Les polynômes sont C^1 et même C^∞ sur \mathbb{R}^2 c'est du cours. Par rapport de fonction C^1 où le dénominateur ne s'annule pas, car $(x, y) \notin F$. On peut même remarquer que $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est un ouvert (les notions de continuité, C^1 ne sont définies « *stricto-sensu* » que sur des ouverts, car le **complémentaire** d'un fermé (F comme fermé...) Je rappelle que l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\varphi(x, y) = 0$, avec l'hypothèse φ **continue**, est un fermé. On vérifie

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = x \left(\frac{2xy^2(x+y) - 1 \times x^2 y^2}{(x+y)^2} \right) + y \left(\frac{2yx^2(x+y) - 1 \times x^2 y^2}{(x+y)^2} \right) = \frac{(x+y)(2x^2 y^2 + 2y^2 x^2 - x^2 y^2)}{(x+y)^2} = 3f(x, y)$$

2) **Etude de la dérivée partielle / x en $(0, 0)$:**

Conformément au cours, on regarde si $\varphi : t \rightarrow f(0+t, 0)$ est dérivable en $t = 0$. Or (**Attention ! à bien gérer** les 2 cas qui sont restreints, il faut être prudent) :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \times 0}{t+0} = 0 & \text{si } (t, 0) \in F \iff t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 0$$

La fonction nulle est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Par conséquent, la dérivée partielle par rapport à x de f existe en $(0, 0)$ et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

Etude de la dérivée partielle / y en $(0, 0)$:

Par symétrie de l'expression, on a aussi $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

Remarque : f étant symétrique en (x, y) , on « *pourrait croire* » $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. En fait, c'est à la fois **vrai et faux ...** L'expression est imprécise : comme ça, elle est fautive, en fait $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$. Vu ? En fait, il est « *dangereux* » d'écrire une dérivée partielle sans préciser le point où elle s'applique. On le « *pratique* » pour la rapidité d'écriture mais c'est source d'erreurs.

3) Je rappelle que l'existence des dérivées partielles est « *moins fort* » que dérivable (on dit plutôt différentiable). La notion de différentiable n'est pas au programme mais le calcul de la différentielle, si... En fait, on a bien, si f est **différentiable** en (x, y) alors f est continue en (x, y) . Mais au programme, vous n'avez pas d'autre moyen de prouver différentiable que par C^1 . Parce que C^1 se prouve par les dérivées partielles continues, c'est du cours. Compliqué, hein ?

Pour en revenir à l'exo, c'est la question-piège. On ne peut rien en déduire du tout ; Tout au plus peut-on en

déduire, c'est limite-cours, que f est continue en $(0,0)$ par rapport à x ou par rapport à y , suivant les axes, si vous préférez. C'est évidemment beaucoup moins fort que continue. On part sur l'idée que f n'est pas continue en $(0,0)$: il faut, **par caractérisation séquentielle**, trouver une suite (x_n, y_n) telle que $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ **mais** $f(x_n, y_n) \not\rightarrow f(0,0) = 0$. Il faut comprendre qu'il ne faut pas la prendre sur les axes mais tangentielle à F (c'est une droite) car c'est « en » F qu'il y a des « discontinuités » par construction. On ne sait pas trop, alors on essaye $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^a}$ avec $a > 1$. C'est donc bien « tangentiel » à F et a que l'on choisira ultérieurement en espérant qu'on en trouve un...

$$\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^a}\right) \rightarrow (0,0) \quad f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^a}\right) = \frac{\frac{1}{n^2} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^a}\right)^2}{\frac{1}{n^a}} \sim \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^a}} = \frac{1}{n^{4-a}} \rightarrow +\infty \text{ pour } a > 4$$

f n'est pas continue en $(0,0)$.

CCINP 2023 🍷 | Mines-Ponts PSI 2021 | Centrale PSI 2014 (extrema sur un ouvert de \mathbb{R}^2)

ENONCÉ 177 On considère $f : (x, y) \rightarrow y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

1) Déterminez les points critiques [2014,2021 : Question absente].

2) Trouvez les Extrema de f en précisant leur nature locale ou globale [2021 : uniquement local.]

1) Les points critiques $M(x, y)$ sont fournis par le gradient nul ou, de manière équivalente, leur différentielle nulle, ou les dérivées partielles nulles (c'est du cours). On peut commencer par remarquer, c'est mieux, que f est clairement C^∞ sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ (somme produit composée de fonctions usuelles), d'où l'existence des dérivées partielles. Ensuite c'est un calcul de résolution de système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + \ln^2 y + 2\ln y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ \ln y(\ln y + 2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \text{ ou } e^{-2} \end{cases}$$

2) Il est nécessaire de bien vérifier (prouver) que U est un ouvert car sinon, point critique n'est pas nécessaire à extrema et c'est un peu plus délicat à gérer. U est ouvert comme produit cartésien de 2 ouverts (ce sont deux intervalles ouverts). On peut aussi le prouver à la main : ce n'est pas très difficile car U est un rectangle (infini). On choisit sa norme, la norme-infinie ou norme sup (rappel : $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$). $M(x, y) \in U$ est bien à l'intérieur car il est contenu dans la boule toute entière contenue dans $U : B_\infty(M, \min(1, |y|))$ (faites un dessin : la boule-infinie est un carré!)

D'après la question 1, il n'y a donc que deux extrema possibles $A(0, 1)$ et $B(0, e^{-2})$.

Etude locale en A

Conformément au cours, on considère la Hessienne, matrice des dérivées secondes partielles :

$$H(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$$

Je rappelle que si la matrice est définie positive (rp. définie négative), A est un minimum (au moins) local (rp. maximum). Si A a une vp > 0 **et** une vp < 0 , ce n'est pas un extrema (c'est un point-col). Dans les autres cas, on ne peut pas conclure avec le cours, il faut regarder le signe de $f(M) - f(A)$ « à la main ». Ici, la seule vp est $2 > 0$, on a donc un minimum (au moins) local.

Ici, il y a une méthode plus rapide qui court-circuite le cours : on a immédiatement $f(A) = 0$ et **comme** $f(x, y) \geq 0$ sur U , on en déduit non seulement que c'est un minimum, mais en plus un **minimum global**.

Etude locale en B

Ici $H(B) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^2 \end{pmatrix}$. Ce n'est donc pas un extrema, c'est un point-col (ce mot mathématique n'est pas stricto-sensu au programme. Si on dessine la surface $z = f(x, y)$, on comprend l'analogie avec un col de montagne).

Remarque : Je rappelle qu'il n'y a aucune méthode pour trouver si un extremum est global : il faut regarder si $f(M) - f(A)$ est positif (ou négatif) **sur tout l'ouvert!** On a quand même un théorème qui affirme qu'il y a toujours un maximum global et un minimum global sur un fermé borné. En tout cas, ici, U n'est ni fermé, ni borné (on a quand même un minimum global)

X — Probabilités

IMT PSI 2023 (variables de Bernoulli)

ENONCÉ 179 Soit (X_1, \dots, X_n) une famille de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$. On note $X = \text{Card} \{ i \leq n, X_i = 1 \}$ et $Z = \text{Card} \{ i \leq n, X_i = X_1 \}$.

- 1) Précisez la loi de X , son espérance et sa variance.
- 2) Les variables X et Z sont-elles indépendantes?
- 3) Calculez la fonction génératrice de Z puis son espérance.

1) Il faut remarquer que l'on a $X = \sum_{i=1}^n X_i$ (si on somme les 1 on a le cardinal!). Comme c'est une somme de vas de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p , X suit la loi binomiale de paramètres n et p , $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On sait alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

2) L'événement $(X = n) \subset (Z = n)$ car si les n variables X_i sont égales à 1, elles sont égales à X_1 puisqu'il vaut 1. Par suite $P((X = n) \cap (Z = n)) = P(X = n) = \binom{n}{n} p^n (1 - p)^0 = p^n$. Alors que, comme évidemment $P(Z = n) \neq 1$, on n'a pas $P(X = n)P(Z = n) = P(X = n)$. On en déduit que $P((X = n) \cap (Z = n)) \neq P(X = n)P(Z = n)$ donc les vas X et Z ne sont pas indépendantes.

3) Avant de calculer la fonction génératrice de Z , on calcule la loi de Z . On a $Z(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, puisque au moins X_1 est égal à X_1 , donc la valeur 0 n'est pas possible.

Soit $1 \leq k \leq n$. Donc, pour $i \neq 1$, $k - 1$ des vas X_i sont égales à X_1 , il y a alors $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles avec les $k - 1$ variables toutes égales à 1 si $X_1 = 1$, soit probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$ **ou** (union indépendante donc $+$) les $k - 1$

variables égales à 0 si $X_1 = 0$, soit une probabilité $(1-p)^k p^{n-k}$. Finalement

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(X = k) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} (1-p)^k p^{n-k}$$

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{k=1}^n P(Z = k) t^k = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} (1-p)^k p^{n-k} \right) t^k \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (pt)^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} ((1-p)t)^k p^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (pt)^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} ((1-p)t)^{k+1} p^{n-k-1} \\ &= pt \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k-1} + (1-p)t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} ((1-p)t)^k p^{n-k-1} \\ &= pt(pt+1-p)^{n-1} + (1-p)t((1-p)t+p)^{n-1} \end{aligned}$$

On a appliqué le binôme de Newton à la dernière ligne (pour $n-1$). L'espérance de Z existe puisque la va est finie.

On sait alors que l'on peut obtenir par la dérivée de G_Z en 1 :

$$G'_Z(t) = p(pt+1-p)^{n-1} + p^2 t(n-1)(pt+1-p)^{n-2} + (1-p)((1-p)t+p)^{n-1} + (1-p)^2 t(n-1)((1-p)t+p)^{n-2}$$

D'où $E(Z) = p + (n-1)p^2 + (1-p) + (n-1)(1-p)^2 = 1 + (n-1)(p^2 + (1-p)^2)$

CCINP PSI 2023 (calcul de probas)

ENONCÉ 184 On suppose que X suit la loi de poisson $\sim \mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Y = X^2 + 1$

1) Calculez $E(Y)$.

2) Calculez la probabilité de $(2X < Y)$.

1) Avant de calculer $E(Y)$ on doit prouver que l'espérance existe : La famille $((n^2 + 1)P(X = n))_{n \in \mathbb{N}} = (e^{-\lambda}(n^2 + 1)\frac{\lambda^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, car comme c'est une suite / série, cela équivaut à la série absolument convergente : on applique le critère d'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{((n+1)^2 + 1)\lambda^{n+1}n!}{(n^2 + 1)\lambda^n(n+1)!} \right| \sim |\lambda| \frac{n^2}{n^2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}(n^2 + 1)\frac{\lambda^n}{n!} \stackrel{(1)}{=} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n - 1)\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) \stackrel{(2)}{=} e^{-\lambda} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^\lambda + \lambda e^\lambda + e^\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \end{aligned}$$

- (1) Comme $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$, il est « adroit » de décomposer le polynôme dans la base $(n(n-1), n, 1)$, base pour les polynômes de degré 2 (en notant la variable n). On a $n^2 + 1 = 1 n(n-1) + 1 n + 1$.
- (2) **Attention !** $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ que pour $n \geq 1$, et, sinon, vaut 0, donc bien gérer les indices de sommation.

2) On remarque que $(2X < Y) = (2X < X^2 + 1)$ et que $2n < n^2 + 1$ ssi $0 < (n-1)^2$ ssi $n \neq 1$; Par suite :

$$P(2X < Y) = P(2X < X^2 + 1) = P\left(\bigcup_{n \neq 1} (X = n)\right) = \sum_{n \neq 1} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) - P(X = 1) = 1 - \lambda e^{-\lambda}$$

On a utilisé l'incompatibilité des événements $(X = n)$ pour passer à la somme des probas.

Centrale PSI 2023 (tirage avec protocole) *

ENONCÉ 188 Soient a et b 2 entiers naturels non nuls et N leur somme. Une urne contient initialement a boules vertes et b boules rouges. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, elle est remplacée par une boule rouge prise dans une réserve annexe. On définit 2 vas : T_k vaut 1 si l'on pioche une boule verte au k -ième tirage et 0 sinon; X_k est le nombre de boules vertes piochées lors de k premiers tirages.

- 1) Déterminez la loi de T_1 et celle de T_2 .
- 2) Montrez que $P(T_{n+1} = 1) = \frac{a - E(X_n)}{N}$. En déduire $P(T_n = 1) = a \frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$
- 3) Calculez $E(X_n)$ puis déterminez sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1) T_1 vaut 1 si l'on tire une boule verte au 1^{er} tirage, 0 sinon. C'est donc une va de Bernoulli de paramètre p où p est la probabilité de succès, cad la proportion de boules vertes, soit $\frac{a}{N}$.

On remarque qu'après chaque tirage, il y a toujours N boules dans l'urne. Seulement la proportion de boules vertes change, qui par ailleurs, ne peut aller qu'en diminuant. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((T_1 = 1), (T_1 = 0))$ appliquée à $(T_2 = 1)$:

$$P(T_2 = 1) = \underbrace{P(T_2 = 1 | T_1 = 1)}_{\frac{a-1}{N}} \underbrace{P(T_1 = 1)}_{\frac{a}{N}} + \underbrace{P(T_2 = 1 | T_1 = 0)}_{\frac{a}{N}} \underbrace{P(T_1 = 0)}_{\frac{b=N-a}{N}} = \frac{a(N-1)}{N^2}$$

2) Après n tirages, on a tiré X_n boules vertes, il y a $a - X_n$ boules rouges dans l'urne. On utilise le système complet d'événements $((X_n = k))_{0 \leq k \leq n}$ et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^n P(T_{n+1} = 1 | X_n = k) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{a-k}{N} P(X_n = k) \\ &= \frac{a}{N} \sum_{k=0}^n P(X_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \frac{a - E(X_n)}{N} \end{aligned}$$

Or $X_n = T_1 + \dots + T_n$, d'où $E(X_n) = E(T_1) + \dots + E(T_n)$. Comme les vas T_i sont des vas de Bernoulli, $E(T_i) = P(T_i = 1)$.

Montrons par récurrence sur n , $P(T_n = 1) = a \frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$

- $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$: C'est la question Q1.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à n . Alors :

$$\begin{aligned} P(T_{n+1} = 1) &= \frac{a - E(X_n)}{N} = \frac{a}{N} - \sum_{k=1}^n \frac{E(T_k)}{N} = \frac{a}{N} - \sum_{k=1}^n \frac{P(T_k = 1)}{N} = \frac{a}{N} - \sum_{k=1}^n a \frac{(N-1)^{k-1}}{N^{k+1}} \\ &= \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} = \frac{a}{N} - \frac{a}{N^2} \frac{1 - (N-1/N)^n}{1 - (N-1)/N} = \frac{a}{N} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)\right) = a \frac{(N-1)^n}{N^{n+1}} \end{aligned}$$

3)

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(T_i) = \sum_{i=1}^n P(T_i = 1) = \frac{a}{N} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{N-1}{N}\right)^i = \frac{a}{N} \frac{1 - (N-1/N)^n}{1 - (N-1)/N} = a - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \rightarrow a$$

Cette limite se comprend bien, après un nombre de tirages élevé, on aura enlevé toutes les boules vertes.

ENONCÉ 193 Soient X, Y 2 va indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. On pose $M = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

- 1) En développant de 2 façons différentes $(1 + X)^{2n}$, montrez $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$
- 2) Calculez la probabilité pour que $X = Y$.
- 3) Calculez la probabilité pour que la matrice soit diagonalisable.

1) On regarde le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n} = (1 + X)^n (1 + X)^n$ en se servant de la formule-produit d'un polynôme, cad $\text{Coef}(P \times Q, X^i) = \sum_{k=0}^i \text{Coef}(P, X^k) \times \text{Coef}(Q, X^{i-k})$ et de la formule du binôme de Newton :

- Le coefficient de X^n dans $(1 + X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.
- Le coefficient de X^n dans $(1 + X)^n (1 + X)^n$ est $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

2) Les va X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, par conséquent :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= P\left(\bigcup_{k=0}^n \underbrace{(X = k) \cap (Y = k)}_{U_k}\right) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n P((X = k) \cap (Y = k)) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 p^{2k} (1-p)^{2n-2k} = (1-p)^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = (1-p)^{2n} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

- (1) Cette sommation résulte du fait que les événements U_k sont incompatibles entre eux : $U_k \cap U_m = \emptyset$ (pour $k \neq m$). En effet si $\omega \in \Omega$ vérifie $\omega \in U_k$, il vérifie $X(\omega) = k$ et donc ne vérifie pas $X(\omega) = m$, soit $\omega \notin U_m$.
- (2) Les va X et Y étant indépendantes, les événements $(X = k)$ et $(Y = k)$ sont aussi indépendants : on peut donc en faire le produit

3) Avec x, y réels, la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ vérifie :

- Si $x \neq y$ la matrice A est d'ordre 2 et possède 2 vp distinctes, elle est donc diagonalisable.
- Si $x = y$, la matrice M ne possédant qu'une seule vp (x d'ordre 2) est diagonalisable ssi c'est $M = xI$, ce qui n'est visiblement pas le cas (à cause du 1...)

Par suite A est diagonalisable ssi $x \neq y$.

M est donc diagonalisable avec la probabilité $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - (1-p)^{2n} \binom{2n}{n}$.

ENONCÉ 195 On a une pièce équilibrée de type Pile-Face. Soit Y une va donnant le rang à partir duquel on obtient pour la première fois Pile et X une va donnant le rang à partir duquel on obtient pour la première fois Pile puis Face. [2022 : la pièce est quelconque]

- 1) Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y)
- 2) En déduire la loi de X .
- 3) Donnez l'espérance de X .

1) Sans rajouter beaucoup de difficulté, on va se placer dans le cas plus général (comme en 2022) où la probabilité d'avoir pile est p (pièce truquée sauf $p = \frac{1}{2}$). On se place dans $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Si $1 \leq n < m + 1$, $P(X = n, Y = m) = 0$ (je vous laisse y réfléchir). Sinon, si $n \geq m + 1 \geq 2$

$$P(X = n, Y = m) = P((X = n) | (Y = m)) P(Y = m) \stackrel{(1)}{=} (1-p)p^{n-m-1} P(Y = m)$$

$$\stackrel{(2)}{=} (1-p)p^{n-m-1} (1-p)^{m-1} p = \boxed{p^{n-m} (1-p)^m} \quad \text{pour l'énoncé } p = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2^n}$$

- (1) $(X = n)$ sachant que $(Y = m)$ signifie qu'on a obtenu Pile du $m + 1^e$ tirage au $n - 1^e$ tirage puis face.
- (2) Y suit évidemment la loi géométrique de paramètre p

2) La famille $((Y = m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements et on applique la formule des probabilités totales :

$$\forall m \geq 1, P(X = n) = \sum_{m=1}^{\infty} P((X = n) \cap (Y = m)) = \sum_{m=1}^{n-1} p^{n-m} (1-p)^m$$

$$= p^n \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^m = p^n \frac{1-p}{p} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1-p}{p}} = \frac{(1-p)^n p + p^{n+1} - p^n}{1-2p}$$

A noter que cette démo ne marche pas pour $p = \frac{1}{2}$ (suite géométrique de raison 1, la formule de sommation ne « marche » pas). Plus simplement $P(X = n) = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} = (n-1) \frac{1}{2^n}$. On a $X(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \rrbracket$

3) Ici, je vais me contenter de l'énoncé, soit $p = \frac{1}{2}$. Il faut d'abord prouver que l'espérance existe en établissant que la famille $(n(n-1) \frac{1}{2^n})_{n \geq 2}$ est sommable, ce qui équivaut à la série absolument convergente. On l'établit, par exemple, par le critère de d'Alembert (je ne mets pas les détails ici). Puis :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{2^n} = \frac{1}{4} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \right] \left[x = \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} x^n \right]'' \left[x = \frac{1}{2} \right]$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-x} - 1 - x \right]'' \left[x = \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{(1-x)^3} \right] \left[x = \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \frac{2}{\frac{1}{8}} = 4$$

On a utilisé en 1, la dérivation terme à terme de la série entière géométrique puisque $\frac{1}{2} \in] -1, 1[$ et $R = 1$. Cette valeur de 4 (tirages en moyenne) n'est pas contre-intuitive. Qu'en pensez-vous?

L'espérance existe car la famille $(kP(X = k))_{k \geq 2}$ est **sommable** car la série est absolument convergente : c'est une combinaison linéaire de séries de terme du type kx^k qui convergent absolument d'après d'Alembert ($|x| < 1$).

$$\text{Si } p \neq \frac{1}{2}, E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \frac{p(1-p)}{2p-1} (p^{k-1} - (1-p)^{k-1}) = \frac{p(1-p)}{2p-1} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} - \sum_{k=2}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \right)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{p(1-p)}{2p-1} \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 - \frac{1}{(1-(1-p))^2} + 1 \right) = \frac{p(1-p)}{2p-1} \frac{2p-1}{(1-p)^2 p^2} = \frac{1}{p(1-p)}$$

ENONCÉ 196 Soient $p, q \in [0, 1]$ tq $p + q = 1$. X, Y sont des vas réelles tq $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket, Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\forall (j, k) \in \llbracket 0; n \rrbracket \times \llbracket 1; n \rrbracket, P((X = j) \cap (Y = k)) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ si $k = j$ et $j \neq 0, = \frac{q^n}{n}$ si $j = 0$, et $= 0$ si $k \neq j$ et $j \neq 0$

- 1) Lois marginales de X et Y ? Que vaut $E(Y)$?
- 2) Les vas X et Y sont-elles indépendantes?
- 3) Donnez la loi conditionnelle de Y sachant $X = j$
- 4) Calculez la covariance de X et Y [2022 : Question absente]

1) $((Y = k))_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales pour calculer la loi marginale de X . **Attention!** au cas particulier de $j = 0$:

$$\forall 1 \leq j \leq n, P(X = j) = \sum_{k=1}^n P((X = j) \cap (Y = k)) = P((X = j) \cap (Y = j)) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^n P((X = 0) \cap (Y = k)) = \sum_{k=1}^n \frac{q^n}{n} = q^n$$

On remarque qu'on a quand même $q^n = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0}$. On reconnaît la loi binomiale de paramètre (n, p)

$$\forall 1 \leq k \leq n, P(Y = k) = \sum_{j=0}^n P((X = j) \cap (Y = k)) = P((X = k) \cap (Y = k)) + P((X = 0) \cap (Y = k)) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n}$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + k \frac{q^n}{n} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n} \sum_{k=1}^n k \stackrel{(3)}{=} np + \frac{q^n}{n} \frac{n(n+1)}{2}$$

- (1) On a reconnu dans la première somme l'espérance d'une variable binomiale de paramètres (n, p) .

2) Les vas X et Y ne sont pas indépendantes car $P(X = 1, Y = 2) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 2)$

$$3) \quad \forall 1 \leq j \leq n, P((Y = k)|(X = j)) = \frac{P((X = j) \cap (Y = k))}{P(X = j)} = \frac{\delta_{kj} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{j} p^j q^{n-j}} = \delta_{kj}$$

$$P((Y = k)|(X = 0)) = \frac{P((X = 0) \cap (Y = k))}{P(X = 0)} = \frac{\frac{q^n}{n}}{q^n} = \frac{1}{n}$$

ENONCÉ 198 Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$. Soit N une variable aléatoire telle que $N + 1$ suive une loi géométrique de paramètre p . On définit la va Y par $Y = X_1 + \dots + X_N$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
- 2) Soit $x \in]-1, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminez la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.
- 3) Calculez $P(Y = k)$ et déterminez la loi de $Y + 1$. [2017 : Déterminez la loi de Y]

1) C'est du cours : une somme de n vas de Bernoulli indépendantes de paramètre p est une va binomiale de paramètres (n, p) . Consultez votre cours de Sup si vous voulez une démo.

2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)}{k!} x^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{n+k})^{(k)} \\ &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+k} \right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - \dots - x^{k-1} \right)^{(k)} = \frac{1}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

On a utilisé la dérivation k fois terme à terme de la série entières sur $] -1, 1 [$ de la série géométrique de rayon $R = 1$

3) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(Y = n) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = n | N = k) P(N = k) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n) p(1-p)^k \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} p(1-p)^k = p^{n+1} (1-p)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} ((1-p)^2)^{k-n} \stackrel{(4)}{=} \frac{p^{n+1} (1-p)^n}{(1 - (1-p)^2)^{n+1}} = \frac{(1-p)^n}{(2-p)^{n+1}} \end{aligned}$$

- (1) Formule des probabilités totale avec le système complet d'événements $((N = k))_{k \in \mathbb{N}}$. On a $k \in \mathbb{N}$ car $N + 1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
- (2) $N \sim \mathcal{G}(p)$ donc $P(N = k) = P(N + 1 = k + 1) = (1-p)^{k+1-1} p$
- (3) Q1 : $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
- (4) Question précédente. On a bien $-1 < 1-p < 1$

On termine avec $Y + 1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \geq 1, P(Y + 1 = n) = \frac{(1-p)^{n-1}}{(2-p)^n} = \left(1 - \frac{1}{2-p}\right) \frac{1}{(2-p)^{n-1}}$.

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2-p}$

CCINP PSI 2023 -2021 (calculs sur loi de probabilité)

ENONCÉ 199 Soit $p \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}$.

- 1) Montrez $(p_k)_{k \geq 1}$ définit une loi de probabilité sur \mathbb{N}^* .
- 2) Soit X une va tq $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p_k$. Justifiez l'existence et déterminez la valeur de $E(X - 1)$ puis de $E((X - 1)(X - 2))$.
- 3) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.

1)

$$\text{On vérifie : } \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 k(1-p)^{k-1} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \stackrel{(1)}{=} p^2 \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = 1$$

- (1) On a utilisé la série entière, dérivable terme à terme sur $] -1, 1 [$ car de rayon $R = 1$ (d'Alembert, immédiat) et on a bien $-1 < 1-p < 1$:

$$\forall x \in] -1, 1 [, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2) L'espérance de $X - 1$ existe bien, car la famille $((k-1)p^2 k(1-p)^{k-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série converge absolument : on utilise la règle d'Alembert (je ne mets pas les détails ici). Puis :

$$E(X - 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)p^2 k(1-p)^{k-1} = p^2(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)k(1-p)^{k-2} \stackrel{(1)}{=} p^2(1-p) \frac{2}{1 - (1-p)^3} = \frac{2(1-p)}{p}$$

- (1) On utilise la même série entière, dérivable terme à terme sur $] -1, 1[$ 2 fois car de rayon $R = 1$, et on a bien $-1 < 1 - p < 1$:

$$\forall x \in] -1, 1[, \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} (x^n)'' = \left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^n \right)'' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Pour $E((X-1)(X-2))$, les calculs sont similaires (on dérive 2 fois), on arrive à $E((X-1)(X-2)) = \frac{6(1-p)^2}{p^2}$

- 3) On utilise la linéarité de l'espérance dans les 2 cas :

$$E(X) = E(X-1+1) = E(X-1) + E(1) = \frac{2(1-p)}{p} + 1 = \frac{2-p}{p}$$

$$E(X^2) = E((X-1)(X-2) + 3(X-1) + 1) = E((X-1)(X-2)) + 3E(X-1) + E(1) = \frac{6(1-p)^2}{p^2} + 3 \frac{2(1-p)}{p} + 1 = \frac{p^2 - 6p + 6}{p^2}$$

$$\text{On termine avec } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{p^2 - 6p + 6}{p^2} - \left(\frac{2-p}{p} \right)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2}$$