Annales PSI 2021

Table des matières

I — Réduction : Diagonalisabilité / Eléments propres à étudier

IMT PSI 2021 (endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ à paramètre) ✌ **Détaillé**

Enoncé 6 Soient E un $\mathbb{C}$-ev de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ tq $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f(e_2) = 0$.

1) Donnez une base de l'image et du noyau de f_a.

2) Donnez la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).

3) Calculez A^2. Qu'en déduire ?

4) Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

RMS 132-1131

1) ***Méthode 1 :***

Malgré la question 2, il est quand même plus simple d'écrire d'abord la matrice A représentant f_a dans la base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ qui est donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

On en tire immédiatement $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1) = \operatorname{Vect}((a, 1, -a))$. ***Attention!*** à bien revenir au morphisme via la base : $\operatorname{Im} f_a = \operatorname{Vect}(ae_1 + 1e_2 - ae_3)$.

Le noyau de A s'obtient par le système associé qui, comme les 3 lignes sont colinéaires (rang 1) est équivalent à $x + z = 0$ (ligne 2). Ceci peut répondre à la question sauf quand on demande une base comme ici ... On a donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, 0)\big)$. ***Attention aussi*** à ne pas oublier de revenir au morphisme : $\operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3, e_2)$.

Remarque : On peut remarquer que $e_2 \in \operatorname{Ker} f_a$ était visible puisque la colonne 2 est nulle.

Méthode 2 :

Il est néanmoins plus élégant et sans doute mieux noté de raisonner sur l'image et le noyau sans passer par la matrice. On a $\operatorname{Im} f_a = \operatorname{Vect}\big(f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)\big)$, c'est du cours ! Et par suite, $\operatorname{Im} f_a = \operatorname{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3)$. Pour le noyau c'est peut-être un peu plus dur. on peut remarquer que $f_a(e_2) = 0$ mais surtout ne pas en conclure (***erreur de raisonnement***!) que $\operatorname{Ker} f_a = \{e_2\}$. On peut seulement en déduire l'inclusion : $\operatorname{Vect}(e_2) \subset \operatorname{Ker} f_a$. On s'aide alors du théorème du rang qui amène $\dim \operatorname{Ker} f_a = 2$. Il en manque 1 (indépendant) ; Là de 2 choses l'une : ou vous remarquez $f_a(e_1) = f_a(e_3)$ donc $f_a(e_1 - e_3) = 0$, soit $\operatorname{Vect}(e_2, e_1 - e_3) \subset \operatorname{Ker} f_a$ puis l'égalité par les dimensions ou vous ne le remarquez pas. Dans ce cas il faut écrire le système en écrivant d'abord la matrice comme plus haut

3) On calcule immédiatement $A^2 = 0$ donc le polynôme X^2 est annulateur. A est nilpotente. On sait aussi $\operatorname{Sp} f_a \subset \{0\}$. ***Attention*** à ne pas dire égal ! Ce n'est pas le polynôme caractéristique.

4) Comme on est dans $\mathbb{C}$ et que le spectre n'est pas vide, on a nécessairement $\operatorname{Sp} f_a = \{0\}$. 0 étant valeur propre, f_a n'est pas inversible (ou pas bijective ou pas un automorphisme, tout ceci est pareil). f_a n'est pas diagonalisable car 0 étant ***la seule valeur propre***, f_a n'est diagonalisable que ssi $f_a = 0.\mathrm{Id}$, ou $A = 0$ ce qui n'est point.

Je vous réécris la démo pour une matrice dans le sens non trivial : si A a ***une seule*** valeur propre α (en raisonnant bien dans $\mathbb{C}$), on peut écrire $A = P \operatorname{Diag}(\alpha, \ldots, \alpha) P^{-1} = P\alpha I P^{-1} = \alpha P P^{-1} = \alpha I$.

CCP PSI 2021-2019 (matrice $n \times n$) **Détaillé**

Enoncé 10

Soit $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{1j} = j$ pour $1 \leq j \leq n$, $a_{i1} = i$ pour $1 \leq i \leq n$ et des 0 ailleurs.

1) Quel est le rang de A ? dim Ker A ?

2) A est-elle diagonalisable ? Que dire de la multiplicité de la vp nulle ?

3) Montrez que Sp $A = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$ avec $\lambda > 1$.

4) Donnez un polynôme de degré 3 annulateur de A.

RMS 132-1139 BEOS 6183 Quentin Haenn2019 ODLT 26-199 *1+1 concours*

1) On écrit la matrice pour la voir ! $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

On a immédiatement $C_2, \dots, C_n$ colinéaire entre elles et C_1 indépendante, soit rg $A = 2$. Par le théorème du rang, dim Ker $A = n-2$ La multiplicité de 0 vérifie $\mu(0) \geq n-2$. Les 2 « *autres* » valeurs propres vérifient $\lambda + \mu + 0 + \dots + 0 = \operatorname{tr}(A) = 1$

2) A est symétrique ***réelle*** ! donc $\mu(0) = \dim \operatorname{Ker} A = n-2$

3) On a déjà vu $\mu = 1-\lambda$. Reste $\lambda > 1$ ou plutôt l'une des deux > 1 ou l'autre < 0.

Méthode 1 usuelle : On calcule le polynôme caractéristique mais c'est un déterminant $n \times n$!

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ -2 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} \underbrace{=}^{(1)} (-1)^{2n}\lambda D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-n) \begin{vmatrix} -2 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \lambda \\ -n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{=}^{(2)} \lambda\ D_{n-1} + (-1)^n n \times \left((-1)^n(-n)\lambda^{n-2}\right) = \lambda D_{n-1} - n^2\lambda^{n-2}$$

$$\underbrace{=}^{(3)} \lambda\left(\lambda D_{n-2} - (n-1)^2\lambda^{n-3}\right) - n^2\lambda^{n-2} = \lambda^2\ D_{n-2} - \left(n^2 + (n-1)^2\right)\lambda^{n-2}$$

$$\underbrace{=}^{(4)} \dots = \lambda^{n-2} D_2 - \left(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2\right)\lambda^{n-2}$$

- **(1)** Développement par rapport à la colonne C_n.
- **(2)** Développement par rapport à loa logne L_{n-1} de la 2ᵉ matrice de taille $n-1$.
- **(3)** On applique la récurrence un 2ᵉ fois.
- **(4)** On continue à appliquer la récurrence jusqu'au dernier. Il est plus raisonnable de s'arrêter à la taille 2, soit $D_3 = D_2 - 3^2\lambda$

On calcule $D_2 = \lambda^2 - \lambda - 2^2$ et finalement $\boxed{D_n = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - \lambda - \sum_{k=2}^{n} k^2\right)}$

Méthode 2 : calcul du déterminant $n \times n$ ***plus subtil :***

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ -2 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -3 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} C & -2 & -3 & \dots & -n \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

On a effectué $C_1 \longleftarrow \lambda C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$ et on a $C = \lambda(\lambda-1) - \sum_{k=2}^n k^2$.
On remarque $P = -\sum_{k=1}^n k^2 < 0$ donc l'une des valeurs propres (noté μ) est < 0, donc l'autre $\lambda = 1-\mu > 1$.

Méthode 3 Plus sophistiquée :

On applique le cours : pour tout endomorphisme a' induit, $\chi_{a'} \mid \chi_a$ (a endomorphisme canoniquement associé à A). I l suffit de trouver le bon espace stable de dimension 2 qui va juste nous donner ce polynôme de degré 2...
On prend $U = (0,2,3,\dots,n)$ et $V = (1,0,\dots,0)$:

$$AU = (\sum_{k=2}^n k^2, 0, \dots, 0) = (\sum_{k=2}^n k^2) V \qquad AV = (1,2,\dots,n) = U + V$$

Soit a' l'endomoprhisme induit sur le ***plan stable*** $\mathrm{Vect}(U,V)$ dans la base $\mathrm{Vect}(U,V)$ a pour matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{k=2}^n k^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_{A'} = \lambda^2 - \lambda - \sum_{k=2}^n k^2$$

On termine : les 2 valeurs propres restantes annulent $x^2 - x - \sum_{k=2}^n k^2$. Il est maladroit de cacluler les racines : somme et produit : $S = 1 > 0$ et $P = -\sum_{k=2}^n k^2 < 0$ donc une racine négative !

4) On applique son cours : A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, A = \{0, \lambda, 1-\lambda\}$ donc A annule $X(X-\lambda)(X-1+\lambda) = X\big(X^2 - X - \sum_{k=2}^n k^2\big)$.

CCINP PSI 2021 (racine carrée matrice 3×3) **Détaillé**

Enoncé 14 Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3\\ -1 & 5 & -2\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminez ses éléments propres.

2) Trouvez une matrice $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2=A$.

3) Les matrices $B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2=A$ sont-elles diagonalisables ?

RMS 132-1134

1) Comme A n'est pas symétrique réelle, la seule méthode est de commencer par caculer le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda\,\mathrm{Id}-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-5 & 2\\ 1 & -3 & \lambda\end{vmatrix}=\cdots=\lambda^3-8\lambda^2+20\lambda-16=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

On a remarqué 2 racine évidente puis $S=6$ et $P=8$: 2et 4 conviennent (on peut aussi calculer le discriminant). Finalement $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$. Les valeurs propres sont 2 et 4. On sait alors A est diagonalisable ssi $\dim E(2)=\dim\ \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{Id}-A)=2$ (inutile de vérifier $\dim E(4)=1$ qui est toujours vrai, car la multiplicité est 1, c'est du cours). On peut résoudre le système mais il est plus adroit de raisonner par le rang. A est diagonalisable ssi $\mathrm{rg}\,(2\,\mathrm{Id}-A)=3-2=1$, ce qui en général « *se voit* »...

$$2\,\mathrm{Id}-A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

C_2 n'est pas colinéaire à C_1 donc le rang est ≥ 2. A ***n'est pas*** diagonalisable. (Le rang est donc nécessairement 2, je vous laisse y réfléchir, sans calcul).

Espace propre associé à 4 :

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E(4)\iff\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z & = & 0\\ x-y+2z & = & 0\\ x-3y+2z & = & 0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z\\ y & = & z\\ z & = & z\end{array}\right.$$

Soit $E(4)=\ \mathrm{Ker}\,(4\,\mathrm{Id}-A)=\mathrm{Vect}\,(1,1,1)$

Espace propre associé à 2 :

Ici, on prend une autre méthode, possible dans certains cas si on a une « *bonne vue* », un peu plus « *élégante* ». On remarque que, dans $2\,\mathrm{Id}-A$, $C_1+C_2=-C_3$, soit $C_1+C_2+C_3=0$, soit $(1,1,1)\in\ \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{Id}-A)$. Comme on a déjà vu que la dimension de l'espace propre était 1, on a l'égalité : $E(2)=\ \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{Id}-A)=\mathrm{Vect}\,(1,1,1)$.

Remarque : Je rappelle que la i^{e} colonne d'une matrice A (associée à a) « *correspond* » à $a(e_i)$ (aux coordonnées de, en fait). Donc, si une combinaison linéaire de colonnes vaut 0, cette « *combinaison* » est dans le noyau.

2) Il s'agit de trouver ***une racine-carrée*** de A. Je rappelle qu'il n'y a pas toujours de racines-carrées d'une matrice et qu'il n'y a aucune raison pour qu'il n'y en ait que 2. Il peut y en avoir des dizaines, voire une infinité... Prêter attention aussi si on vous demande de trouver ***toutes*** les racines carrées. C'est plus dur.

La méthode générale est de diagonaliser, puis de chercher une racine carrée de la matrice diagonale, ce qui est facile, si les coefficients diagonaux sont positifs ! (je vous laisse y réfléchir). Ici, cela ne fonctionne pas, on est contraint de trigonaliser. Je rappelle qu'il est aisé de trigonaliser, quand on a « *un défaut* » de ***un*** vecteur propre, ce qui est le cas ici, on calcule $n-1$ vecteurs propres (indépendants) et on complète en une base par n'importe quel vecteur (indépendant tout de même). La matrice (de l'endomorphisme canoniquement associé) aura alors cette forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ici, on prend $e_1 = (-1,1,1)$, $e_2 = (1,1,1)$. On peut compléter par $e_3 = (0,0,1)$. Reste à calculer les *. On a $Ae_3 = C_3 = (3,-2,0)$ ***mais ce ne sont pas*** les coordonnées dans la base (e_1, e_2, e_3). On résout $(-3,-2,0) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Je vous laisse réfléchir au fait que γ (le * sur la diagonale) est nécessairement la valeur propre 2 :

$$\left\{\begin{array}{ccc} -3 & = & -\alpha+\beta \\ -2 & = & \alpha+\beta \\ 0 & = & \alpha+\beta+2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & \frac{1}{2} \\ \beta & = & -\frac{5}{2} \\ \gamma & = & 2 \end{array}\right.$$

On peut donc alors écrire, ***sans calcul***, avec P la matrice de passage vers la nouvelle base :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On va alors chercher une racine carrée de T sous une forme indéterminée, mais cela compte ***neuf*** coefficients! Il est plus malin de remarquer qu'une racine carrée de T, $U^2 = T$ commute avec T : $UT = TU = U^3$. En effet, cela va donner a un système linéaire, sans carré qui complique beaucoup le système. Puisqu'on ne demande qu'une racine carrée, on cherche U triangulaire! (une différence avec chercher ***toutes*** les racines carrées)

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \quad UT = \begin{pmatrix} 4a & 2b & \frac{a}{2} - \frac{5}{2}b + 2c \\ 0 & 2e & -\frac{5}{2}e + 2f \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \quad TU = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c + \frac{i}{2} \\ 0 & 2e & 2f - \frac{5}{2}i \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

$UT = TU$ amène $b = 0$ (coefficient $(2,1)$), $e = i$ (coefficient $(2,3)$). On ne considère ***pas*** le coefficient $(3,1)$ qui va compliquer le carré (encore une différence avec chercher ***toutes*** les racines carrées) :

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ac+ce \\ 0 & e^2 & 2ef \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On prend, ***par exemple***, $a = 2$, $e = \sqrt{2}$, $f = -\dfrac{5}{8}\sqrt{2}$, $c = \dfrac{1}{2(2+\sqrt{2})}$. Une racine carrée de A (le B de l'énoncé) est alors PUP^{-1}.

3) Si une matrice est diagonalisable, son carré est diagonalisable : en effet $B = PDP^{-1}$ amène $B^2 = PD^2P^{-1}$ avecD^2 diagonale. Donc, ici, ***si*** B était diagonalisable, $A = B^2$ le serait. ***Absurde!***

CCP PSI 2021-2019 (diagonalisation matrice par blocs) ✷ ☜ **Détaillé**

Enoncé 16 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$

1) Exprimez le rang de B en fonction de celui de A.

2) Trouvez une relation entre χ_B et χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.

3) Si A inversible et possède n vp distinctes, B est-il diagonalisable ?

4) 2019 : Déterminez les dimensions des espaces propres de B en fonction de celles des espaces propres de A.

5) Discutez de la diagonalisabilité de B si A non inversible.

6) 2019 : Montrez B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et inversible.

Nicolas Blandin2021 RMS 132-1142 130-1214 *1+1 concours*

1) On a $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A + n$. Montrons-le proprement, notons $C_1, \dots, C_{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ les colonnes de B et $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}^n$ celles de A (***Attention!*** elles ne sont pas dans le même ev). On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$ la base canonique de C^{2n}

$$\begin{aligned}\operatorname{rg} B &= \dim \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_{2n}) = \dim \big(\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) + \operatorname{Vect}(C_{n+1}, \dots, C_{2n})\big) \\ &\overbrace{=}^{(1)} \dim\big(\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) \oplus \operatorname{Vect}(C_{n+1}, \dots, C_{2n})\big) \overbrace{=}^{(2)} \dim \operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{2n}] + \dim\big(\operatorname{Vect}(C_{n+1}, \dots, C_{2n})\big) \\ &\overbrace{=}^{(3)} n + \dim\big(\operatorname{Vect}(c_1, \dots, c_n)\big) = n + \operatorname{rg} A\end{aligned}$$

- **(1)** La somme des deux ev est directe puisque $C_i = \varepsilon_{n+i}$ pour $1 \leq i \leq n$, soit $\operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{2n})$ et $\operatorname{Vect}(C_{n+1}, \dots, C_{2n}) \subset \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Tout ceci « *à cause des 0 décalés* ». Je vous laisse y réfléchir
- **(2)** Dimension d'une somme directe est la somme des dimensions
- **(3)** La famille $(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{2n})$ est libre et pour justifier proprement l'autre afirmation, qui se comprend bien à cause des 0, on peut utiliser l'application $\varphi : (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$ qui est clairement un isomorphisme donc conserve les dimensions

Remarque : Par le (double) théorème du rang (appliqué à B et $\mathbb{C}^{2n}$ d'une part et A et $\mathbb{C}^n$ d'autre part), on obtient $\dim \operatorname{Ker} B = \dim \operatorname{Ker} A$. Je vous laisse y réfléchir.

2) $\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - B) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{vmatrix}$. Le plus simple (si on peut dire!) est de penser à faire ce produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & -A \\ -I_n & \lambda I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 I_n - A & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

On passe alors au déterminant,en se rappelant que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants diagonaux. On obtient : $\chi_B(\lambda) \times \lambda^n = \det(\lambda^2 I_n - A)\lambda^n$, soit finalement $\chi_B(\lambda) = \chi_A(\lambda^2)$.

Remarque : Il y a un théorème (hors programme) qui dit que si les matrices $n \times n$ A, B, C, D commutent 2 à 2, alors $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$

On en déduit que le spectre de B est l'ensemble des racines carrées de celles de A. Cela en fait bien 2 fois plus, puisqu'on est dans $\mathbb{C}$ et qu'il y a toujours deux racines carrées. Attention! au cas de 0 qui a une racine carrée « *double* »

3) Si A est inversible et ses n vp sont distinctes, alors les $2n$ racines carrées sont toutes distinctes (puisqu'il n'y a pas 0!), donc B est diagonalisable.

4)

5) Si A est non inversible, 0 est vp de A. Notons $m \geq 1$ sa multiplicité. Alors 0 est vp de B avec la multiplicité de $2m$ (le nombre de racines carrées). Or on a vu $\dim E_B(0) = \dim\ \mathrm{Ker}\, B = \dim\ \mathrm{Ker}\, A = \dim E_A(0)$. Comme $\dim\ \mathrm{Ker}\, A \leq m$, il suit $\dim\ \mathrm{Ker}\, B \leq m < 2m$. B n'est pas diagonalisable.

CCINP PSI 2021 (endomorphisme de matrices) ✌ **Détaillé**

Enoncé 18 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E,\ u(M) = aM + b\,{}^{t}M$.

1) Montrez que u est un endomorphisme.

2) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.

3) Calculez $\operatorname{tr} u$ et $\det u$.

BEOS 6066

1) Laissé au lecteur

2) On remarque que u s'écrit $u = a\,\mathrm{Id} + b\tau$ avec $\tau : M \longrightarrow {}^{t}M$. Or les valeurs propres de $a\,\mathrm{Id} + \varphi$ sont immédiatement celles de φ augmentées de a et associées aux mêmes espaces propres puisque $\varphi(x) = \lambda x \iff (a\,\mathrm{Id} + \varphi)(x) = (a+\lambda)x$. Par suite, τ étant une symétrie puisque $\tau^2 = 1$, on sait alors que ses valeurs propres sont -1 et 1, et que $E_\tau(1) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_\tau(-1) = A_n$. On en déduit que les valeurs propres de u sont $a+b$, d'espace propre associé $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et $a-b$, d'espace propre associé A_n.

Méthode 1 : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et A_n de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ Pour montrer u diagonalisable,on peut constater $\dim E_u(a+b) + \dim E_u[a-b) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2 (par un polynôme annulateur) : On calcule, en remarquant que Id et τ commutent, pour appliquer l'identité remarquable :

$$u^2 = a^2\,\mathrm{Id} + b^2\tau^2 + 2ab\tau = (a^2+b^2)\,\mathrm{Id} + 2a(u - a\,\mathrm{Id}) = (b^2 - a^2)\,\mathrm{Id} + 2au$$

u annule le polynôme $X^2 - 2aX - (b^2 - a^2) = \big(X - (a+b)\big)\big(X - (a-b)\big)$, polynôme scindé à racines simples ***si*** $a+b \neq a-b \iff b \neq 0$. De toute façon, si $b = 0$, u est diagonalisable puisque $u = a\,\mathrm{Id}$. On retrouve d'ailleurs aussi les valeurs propres.

3) Connaissant toutes les valeurs propres λ et leurs multiplicités respectives μ, il suffit d'appliquer les formules du cours la trace est la somme des valeurs propres, soit la somme des $\mu\lambda$ et le déterminant le produit, soit le produit des λ^μ :

$$\operatorname{tr} u = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = n^2 a + nb \qquad \det u = (a+b)^{n(n+1)/2}\,(a-b)^{n(n-1)/2}$$

CCINP PSI 2021 (dilatation-transvection) **Détaillé**

Enoncé 19

Soit $n \geq 2$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

1) Montrez f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Etablir $y \in \operatorname{Im} f \iff f(y) = y$

3) Montrez $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^n$. Que peut-on en déduire ?

4) Déterminez les espaces propres de f.

Mathieu Dore 2021

1) endo est immédiat car $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Linéaire n'est peut-être pas immédiat ... Soient $x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) v = \alpha\Big(x + \big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big) v\Big) + \beta\Big(y + \big(\sum_{i=1}^{n} y_i\big) v\Big) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

2) On procède par double implication, en constatant $f(v) = 0$. :
Si $y = f(y)$, alors $y \in \operatorname{Im} f$. Immédiat si on a bien compris l'image.
Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors $y = f(z) = z + \big(\sum_{i=1}^{n} z_i\big) v$, puis $f(y) = f(z) + \big(\sum_{i=1}^{n} z_i\big) f(v) = f(z) = y$

Remarque : On vient de montrer $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(Id - f) = E(1)$. Une projection vérifie cette propriété (c'est quasi du cours) ***mais*** est-ce une projection ici ?

3) Comme $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$, il faut et il suffit de montrer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ pour montrer l'assertion de l'énoncé, cad le noyau et l'image supplémentaires. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, alors $f(x) = 0$ et $f(x) = x$ d'après Q2, soit $x = 0$.

En se servant de la remarque précédente, on a montré :

$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(Id - f) = \mathbb{R}^n = E(0) \oplus E(1)$$

f est donc ***diagonalisable*** de spectre $\operatorname{Sp} f = \{0, 1\}$. Il annule donc $P(X) = X(X-1)$. C'est donc une ***projection***.

Question : est-ce une projection orthogonale ?

4)
$x \in E(1) \iff f(x) = x \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ car $v \neq 0$; On a reconnu l'équation d'un hyperplan (j'espère !)
Pa conséquent $\operatorname{Ker} f$ est une droite, et comme on a déjà remarqué $f(v) = 0$, il suit $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(v) = E(0)$.

Remarques

- En « *généralisant* » un peu : $f(x) = x - \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) v$ (on suppose $v \neq 0$ et les α_i non tous nuls), toutes ces applications sont ce qu'on appelle des ***dilatations-transvections***. Regardez transvection sur Internet : cela existe en « *géographie* »...
- On constate que les vecteurs invariants, cad $E(1)$, cad $f(x) = x$ est donné par $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ qui est l'équation d'un hyperplan H. Les dilatations-transvections sont les endomorphismes ou les ***invariants « forment » un hyperplan***. La transvection correspond au cas où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, cad $v \in H$ et est ***non*** diagonalisable. Les autres cas sont des dilatations qui sont diagonalisables avec 2 cas particuliers : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 1$ qui donne une projection et le cas $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = -2$ qui donne une symétrie. On parle du rapport (du « *coefficient* ») de la dilatation donné par $\det f = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 1$.

CCP PSI 2021-2016 (endomorphisme de polynômes) **Détaillé**

Enoncé 21 Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P)(X) = (X-a)P'(X) + P(X) - P(a)$.

1) Question absente en 2021 : Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de l'endomorphisme f

2) Donnez noyau et image de f

3) Donnez les éléments propres de f.

Camille Havard 2021 | Odlt 23-203 *1+1 concours*

1) On calcule immédiatement

$$\forall\, 0 \leq k \leq n,\ f(X^k) = (X-a)kX^{k-1} + X^k - a^k = (k+1)X^k - akX^{k-1} - a^k$$

Là, il faut comprendre tout seul que c'est une matrice ***triangulaire*** puisque un polynôme de degré k s'écrit en fonction des degrés inférieurs. On a même ***toutes*** les valeurs propres qui sont les éléments diagonaux, soit les $k+1$ pour $1 \leq k \leq n$ et ***Attention!*** à $k = 0$ à part qui donne 0! On peut déjà conclure f diagonalisable même si ce n'était pas demandé (vp toutes distinctes) et espaces propres tous des droites.

2) ***Méthode 1 :***
On a fait la question Q1 ou on a pensé à écrire tout seul la matrice de f dans la base canonique (ce n'est pas une idée originale : toujours penser à écrire une matrice : cela « *peut* » être plus simple pour les calculs mais pas pour les raisonnements). Peut-être que l'examinateur le demande après... Dans ce cas, 0 est vp simple et $f(1) = 0$,donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}(1)$

Analyse :
Si $P \in \operatorname{Ker} f$, $(X-a)P'(X) = P(a) - P(X)$ (1). a annule $P(a) - P(X)$ donc $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$. On dérive et on trouve $P'(X) = Q(X) + (X-a)Q'(X)$. En réinjectant dans (1), on trouve $P'(X) = Q(X)$ donc $(X-a)Q'(X) = 0$ soit $Q'(X) = 0$ et $Q = cste$ qui amène $P(X) = cX + d$.
Réciproquement
$f(cX+d) = (X-a)c + cX + d - ca - d = 0 \iff c = 0$. Ok. Même résultat.

Le théorème du rang amène $\dim \operatorname{Im} f = (n+1) - 1 = n$, cad c'est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Si on remarque que $f(P)(a) = 0$, on en déduit $\operatorname{Im} f \subset \{P,\ P(a) = 0\}$ qui est un hyperplan puisque noyau de la forme linéaire non nulle $P \longrightarrow P(a)$. Pour des raisons de même dimension, cette inclusion est alors une égalité.

3) On a déjà vu les vp sont les $k+1$ pour $1 \leq k \leq n$ et 0. C'est plus dur sans la matrice. Il faudrait aussi faire une analyse-synthèse plus dure que le noyau.
Reste à trouver les vecteurs propres. En fait il suffit d'en trouver 1! associé à $k+1$(on sait que ce sont des droites).
Allez, va falloir faire une analyse :

$$f(P)(X) = (X-a)P'(X) + P(X) - P(a) = (k+1)P(X) \implies P(a) = 0$$

Coup de Poker, on essaye $(X-a)^k$, cela éviterait l'analyse :

$$f\big((X-a)^k\big) = (X-a)k(X-a)^{k-1} + (X-a)^k = (k+1)(X-a)^k$$

Et oui! Ca marche ... Je peux aller me coucher...

CCP PSI 2021-2019 (diagonalisabilité endomorphisme) **Détaillé**

Enoncé 22 Soient E un ev de dimension n, l une forme linéaire non nulle sur E et $a \neq 0 \in E$. On pose $f : x \in E \longrightarrow l(a)x - l(x)a$.

1) Montrez f endomorphisme de E.

2) Calculez $f(a)$.

3) Question absente en 2021 : Déterminez $\operatorname{Ker}(f)$ et calculez $f(\operatorname{Ker} l)$.

4) Calculez les éléments propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

(*Indication* : on distinguera les cas $l(a) = 0$ et $l(a) \neq 0$) (**2019 :** Indication absente)

5) On suppose $l(a) = 0$. Calculez f^2, en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouvez le résultat de Q4)

Antoine Michon 2021 RMS 130-1201 *1+1 concours*

1) l étant une ***forme*** linéaire, $l(a)$ et $l(x)$ sont des réels, $l(a)x - l(x)a$ est bien un vecteur de E. La linéarité de f résulte de la linéarité de l.

2) $f(a) = 0$. On en déduit $\operatorname{Vect}(a) \subset \operatorname{Ker} f$ (ce n'était pas demandé...)

3) Question que n'a pas eue Antoine, je ne détaille pas, on trouve $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a)$ si $l(a) \neq 0$ sinon $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} l$ et si $l(a) \neq 0$, $f(\operatorname{Ker} l) = \operatorname{Ker} l$ et sinon $f(\operatorname{Ker} l) = \{0\}$.

Comme l est une forme linéaire non nulle $\operatorname{Ker} l = H$ est un ***hyperplan***.

4) La question Q3 aidait car elle nous donne la valeur propre 0 et l'espace propre associé qui est $\operatorname{Ker} f$. On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse :

Soit λ vp de f, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = l(a)x - l(x)a = \lambda x$ soit $\big(l(a) - \lambda\big)x = l(x)\ a$, égalité ***vectorielle***. Par suite, on distingue 2 cas :

- ***ou*** $\lambda \neq l(a)$, et alors x est colinéaire à a
- ***ou*** $\lambda = l(a)$ et alors $l(x) = 0$.

Ce qu'il faut alors comprendre (je vous laisse y réfléchir), c'est qu'on a démontré que $l(a)$ est valeur propre, avec comme espace propre « *au moins* » (c'est mal dit) $\operatorname{Ker} l$ et que s'il y a une ***autre*** valeur propre, le seul vecteur propre ***possible*** associé est a (à colinéarité près)

Synthèse :

On a vu $f(a) = 0 = 0.a$. Donc c'est une ***autre*** valeur propre ssi $l(a) \neq 0$ d'où les 2 cas indiqués par l'énoncé pour vous aider...

- $l(a) \neq 0$. On a donc 2 vp de f d'après l'analyse : $l(a)$ et 0. On a vu $E\big(l(a)\big) \supset \operatorname{Ker} l = H$ qui est un hyperplan, et $E\big(0\big) \supset \operatorname{Vect}(a)$. Pour des raisons de dimension (ces deux espaces propres étant en somme directe) ce sont deux égalités. D'où $\dim E\big(l(a)\big) + \dim E\big(0\big) = n - 1 + 1 = \dim E$. f est ***diagonalisable***.
- $l(a) = 0$. Une seule valeur propre 0. On sait alors f diagonalisable ssi $f = 0.Id$ ce qui n'est pas car l n'est pas l'application nulle.

5) $l(a) = 0$. f ***n'est pas*** diagonalisable donc on sait déjà qu'un polynôme annulateur de f ne sera pas scindé à racines simples. Comme il n'y a pas de vp complexes, il sera scindé (dans $\mathbb{R}$) à racines multiples. Comme la seule valeur propre est 0, un polynôme annulateur « *simple* » est sans doute X^2 ou X^3... Je vous laisse y réfléchir ...

$$\forall\, x \in E,\ f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f\big(l(a)x - l(x)a\big) = l(a)f(x) - l(x)f(a) = 0$$

X^2 est annulateur de f. On en déduit f nilpotent donc non diagonalisable, mais ce n'est pas « *stricto-sensu* » du cours, on le redémontre. ***Attention !*** à ne pas commettre l'***erreur de raisonnement*** suivante (c'est le « *piège* » !) : X^2 n'est pas scindé à racines simples ***donc*** f n'est pas diagonalisable.

Remarque : Si $l(a) = 0$, $f(x) = -l(x)\ a$. f est de rang 1. Je vous laisse y réfléchir.

II — Réduction : Autres

CCINP PSI 2021 (espaces stables d'une matrice 3×3) **Détaillé**

Enoncé 25 Soit $A=\begin{pmatrix}0&3&-2\\-2&5&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) Montrez A trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

2) Donnez les droites stables de A.

3) Donnez les plans stables de A

RMS 132-1138

1) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x)=\det(x\,\mathrm{Id}-A)=\begin{vmatrix}x&-3&2\\2&x-5&2\\1&-2&x\end{vmatrix}=x^3-5x^2+8x+4=(x-1)(x-2)^2$$

Le polynôme caractéristique est scindé ***sur*** $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. J'en profite pour rappeler que ***toute*** matrice est trigonalisable ***sur*** $\mathbb{C}$. Elle est diagonalisable ssi $\dim\ \mathrm{Ker}\,(2\,\mathrm{Id}-A)=2$ (inutile de vérifier pour la multiplicité 1) ssi, via le théorème du rang, $\mathrm{rg}\,(2\,\mathrm{Id}-A)=3-2=1$. On écrit alors :

$$2\,\mathrm{Id}-A=\begin{pmatrix}2&-3&2\\2&-3&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

La colonne C_1 n'est pas colinéaire à C_2, donc $\geq\geq 2$. A n'est pas diagonalisable, sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$ d'ailleurs.

2) Les droites stables sont ***exactement*** les droites dirigées par les vecteurs propres, c'est du cours. Par conséquent, cherchez les droites stables est la ***même question*** « *déguisée* » que cherchez les éléments propres. Je vous redémontre rapidement : le cours de Sup nous apprend que, si $F=\mathrm{Vect}\,(e_1,\dots,e_p)$, alors $u(F)=\mathrm{Vect}\big(u(e_1),\dots,u(e_p)\big)$. En particulier, si la droite D est dirigée par e (cad $D=\mathrm{Vect}\,(e)$), alors $u(D)$ est dirigée par $u(e)$. Ce n'est donc D que ssi $u(e)=\lambda e$. Le cas $\lambda=0$ donne $u(D)=\{0\}$, la droite est quand même considérée comme stable.

Il y a donc ici 2 systèmes 3 à résoudre dont les solutions sont deux dreoites, d'après le calcul précédent. Je ne mets pas les détails : $E(2)=\mathrm{Vect}\,(2,2,1)$ et $E(1)=\mathrm{Vect}\,(1,1,1)$. Pour répondre à la question posée ***précisémenbt***, les droites stable sont exactment les 2 droites dirigées par ces 2 vecteurs.

Remarque : Attention ! si on avait trouvé un plan comme espace propre, par exemple, $x-2y+z=0$ ssi $\mathrm{Vect}\big((2,1,0),(1,0,-1)\big)$. Alors ce serait toutes les droites dirigées par $(2a+b,a,-b)$.

3) C'est une question un peu plus délicate. Il est plus simple de savoir le résultat, qui n'est pas du programme, qu'un hyperplan $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ est stable par A ssi $(a_1,\dots,a_n)$ est ***vecteur propre de*** $^{\mathrm{t}}A$**.** Si on ne sait pas ce résultat, on peut toujours « *bidouiller* » avec un plan $ax+by+cz=0$., mais cela risque d'être plus calculatoire et plus difficile. Je rappelle qu'un plan de $\mathbb{R}^3$ est un hyperplan et je vous démontre ce résultat : L'équation de l'hyperplan peut s'écrire sous la forme $^{\mathrm{t}}U\ X=0$ avec $U=(a_1,\dots,a_n)$ et $X=(x_1,\dots,x_n)$. En suite l'hyperplan est stable ssi l'équation obtenue est colinéaire, ce qui s'écrit $^{\mathrm{t}}V\ X=0$ avec V colinéaire à U. L'hyperplan est stable par A ssi $^{\mathrm{t}}U\ AX=0$ qui s'écrit aussi $^{\mathrm{t}}(^{\mathrm{t}}AU)\ X=0$ et nécessite $^{\mathrm{t}}AU=\lambda U$. Ok.

On cherche donc les éléments propres de $^{\mathrm{t}}A$. On peut noter que l'on sait, c'est du cours, que $^{\mathrm{t}}A$ a même polynôme caractéristique, soit pour valeurs propres 2 à la multiplicité 2 et 1 à la multiplicité 1. On sait aussi que A diagonalisable ssi $^{\mathrm{t}}A$ diagonalisable : en effet $A=PDP^{-1}\iff {}^{\mathrm{t}}A=(^{\mathrm{t}}P)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}D\,{}^{\mathrm{t}}P$ et $^{\mathrm{t}}D$ diagonale. Donc l'espace propre associé à 2 de ${}^{t}A$ sera aussi une droite. Je ne mets pas les détails des 2 calculs de système 3×3 avec ${}^{t}A$. On trouve $E_{{}^{t}A}(2) = \mathrm{Vect}\,(-1,1,0)$ et $E_{{}^{t}A}(1) = \mathrm{Vect}\,(0,1,-2)$. Il suit qu'il y a 2 plans stables par A qui sont $-x+y=0$ et $y-2z=0$.

CCINP PSI 2021 (matrices sans valeur propre commune) ✷ **Détaillé**

Enoncé 28 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

1) Montrez, si P est un polynôme annulateur de A, les valeurs propres de A sont racines de P.

2) Montrez la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

3) Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouvez $AX = XB \iff X = 0$.

4) Montrez, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AX - XB = M$.

RMS 132-1144

1) C'est du cours! Soit λ une valeur propre,; il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Puis, par récurrence immédiate, $A^k X = \lambda^k X$ (***Attention!*** à ne pas écrire AX^k ou $(AX)^k$ qui n'ont aucun sens mathématique). En posant $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, il vient :

$$0 = P(A)X = \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\Big)X = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k X = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k X = \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\Big)X = P(\lambda)X$$

Comme $X \neq 0$, il vient $P(\lambda) = 0$.

Remarque : Attention! il n'y a qu'un sens. Les racines de P ne sont pas nécessairement valeurs propres!

2) Le polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$: $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, les λ_i étant éventuellement répétés avec la multiplicité. Donc $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i \,\mathrm{Id})$. En utilisant le résultat du cours : $B - \lambda Id$ est inversible ssi λ ***n'est pas*** valeur propre de B, comme aucun des λ_i, qui est valeur propre de A, n'est valeur propre de B, chaque $B - \lambda_i \,\mathrm{Id}$ est inversible. Par suite, leur produit $\chi_A(B)$ est inversible aussi.

Remarque : Attention! si vous utilisez des morphismes : le produit $\prod$ « *devient* » un $\circ$ (composée).

3) Un seul sens non trivial est à établir. On suppose donc $AX = XB$ avec $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, on écrit :

$$A^2 X = A\ AX = A\ XB = (AX)\ B = XB\ B = XB^2$$

Une récurrence immédiate amène $A^k X = XB^k$. Puis par sommation :

$$\sum_{k=0}^{p} a_k(A^k X) = \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k A^k\Big)\ X = \sum_{k=0}^{p} a_k(XB^k) = X\ \Big(\sum_{k=0}^{p} a_k B^k\Big)$$

On vient de démontrer que, pour un polynôme ***quelconque*** complexe, $P(A) \times X = X \times P(B)$. Il faut alors penser à utiliser la question précédente : $\chi_A(A \times X = X \times \chi_A(B)$. Le théorème de Cayley-Hamilton amène $\chi_A(A) = 0$ puis $X \times \chi_A(B) = 0$. ***Mais*** la matrice $\chi_A(B)$ est inversible. Il suit $X = 0$.

Remarque : Je rappelle que $AB = 0$ et $B \neq 0$ donc $A = 0$ est une grave erreur. Par contre la conclusion est vraie si B inversible…

4) Il faut, là-encore, voir comment la question précédente peut nous aider. On considère l'application $\varphi : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow AX - XB$. Elle est clairement linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie (n^2 je vous rappelle). Elle est ***injective*** d'après la question précédente (je vous laisse y réfléchir), donc ***surjective*** ce qui prouve la question (je vous laisse y réfléchir aussi…).

CCINP PSI 2021 (polynôme annulateur d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$) **Détaillé**

Enoncé 32 Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, non nul, tel que $f + f^3 = 0$ et A sa matrice dans la base canonique.

1) Montrez que A n'est pas inversible.

2) Montrez $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + Id)$.

3) Montrez $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit au vecteur nul.

4) Montrez que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

RMS 132-1127

1) f annule le polynôme $P(X) = X^3 + X = X(X^2+1) = X(X-i)(X+i)$, par suite $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} f \subset \{0\}$ et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} f \subset \{0, i, -i\}$. Ce polynôme est aussi scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ (il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$) donc f est diagonalisable « *sur* » $\mathbb{C}$. On ne peut ***rien déduire*** de pas scindé sur $\mathbb{R}$.

La dimension du $\mathbb{R}$-ev étant impaire, f admet nécessairement une ***valeur propre réelle*** qui ne peut être que 0. par conséquent f n'est pas inversible.

2) On montre les deux propriétés suivantes :

- $\boxed{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f^2 + Id) = \{0\}}$
  L'inclusion $\supset$ étant immédiate, on démontre l'autre. Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f^2 + Id)$. On en déduit $f(x) = 0$ et $(f^2 + \mathrm{Id})(x) = f^2(x) + x = 0$. Il suit $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ et $f^2(x) = -x$, soit $x = 0$
- $\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f^2 + Id)}$
  Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, soit $f(y) = 0$ et $f^2(z) = -z$. On applique directement f^2 à x. Avec la linéarité, $f^2(x) = f(f(y)) + f^2(z) = 0 - z = -z$, puis $y = x - z = x + f^2(x)$. L'analyse est donc terminée.
  Synthèse : Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On le décompose suivant $x = \big(x + f^2(x)\big) + \big(-f^2(x)\big)$. Il reste à vérifier la bonne appartenance aux 2 sevs indiqués :
  - $\boxed{x + f^2(x) \in \operatorname{Ker} f}$: $f\big(x + f^2(x)\big) = f(x) + f^3(x) = P(f)(x) = 0$
  - $\boxed{-f^2(x) \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})}$: $(f^2 + \mathrm{Id})(-f^2(x)) = -f^4(x) - f^2(x) = -\big(f \circ (f^3 + f)\big)(x) = -\big(f \circ P(f)\big)(x) = 0$

3) C'est probablement une « *question-piège* » : l'examinateur veut savoir si l'étudiant a compris que c'est la même question que la ***Q1*** (parce qu'on est dans un endomorphisme en dimension finie : non bijectif ssi non injectif).

4) On peut remarquer que la matrice est diagonale par 2 blocs, ce qui signifie qu'il existe 2 espaces stables par f supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Ce sont très certainement ceux de la question ***Q2***...

Ce genre de question se traite en général par la recherche d'une base réalisant la matrice indiquée, par analyse-synthèse. ***Sauf*** dans certains cas simples : par exemple démontrer qu'une matrice est semblable à une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$ ***équivaut à démontrer*** que A est diagonalisable (de spectre ***égal*** à $a_1, \ldots, a_n$.

Analyse : Soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^3$ dont l'expression de la matrice de f dans cette base est la matrice A. On en déduit, par lecture des colonnes, $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = -e_3$, $f(e_3) = e_2$. Il faut analyser comment trouver cette base. On a déjà élémentairement $e_1 \in \operatorname{Ker} f$. Puis en composant par f : $f^2(e_2) = -f(e_3) = -e_2$ donc $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ (on s'en doutait, non ?). Il faut ensuite prendre $e_3 = -f(e_2)$. L'analyse est terminée. Encore faut-il le savoir...

Synthèse : On prend $e_1 \in \operatorname{Ker} f$, ***mais il faut*** montrer $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. C'est ***Q3***. On prend $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ mais il faut aussi établir que ce noyau est non nul. Si $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = \{0\}$, **Q2** amène $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$, soit $f = 0$. Impossible par hypothèse. Ensuite, on pose $e_3 = -f(e_2)$.

On vérifie d'abord (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$: la famille est de cardinal 3, évidemment éléments de $\mathbb{R}^3$ et libre : soit une combinaison linéaire nulle : $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \quad (1)$. On applique f 2 fois :

$$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = -\beta e_3 + \gamma e_2 = 0 \quad (2) \qquad \text{puis } -\beta e_2 - \gamma e_3 = 0 \quad (3)$$

$\beta L_2 + \gamma L_3$ amène $-(\beta^2 + \gamma^2) e_3$ puis $\beta^2 + \gamma^2 = 0$, soit $\beta = \gamma = 0$ car on est dans $\mathbb{R}$ et en rapportant dans L_1, $\alpha = 0$.

Vérifions que la matrice de f dans cette base est celle de l'énoncé en comparant les colonnes :

- $f(e_1) = 0$: colonne 1 Ok.
- $f(e_2) = -e_3$, ***par définition***, colonne 2 Ok.
- $f(e_3) = -f^2(e_2) = e_2$ ***car on a bien pris*** $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$, colonne 3 Ok.

Remarque : Il y a néanmoins une erreur de raisonnement dans la synthèse, l'avez-vous vue ? Si non, relisez et cherchez-la…

Mines-Telecom PSI 2021 | Mines-Ponts PSI 2017-2013 (morphisme de polynômes) **Détaillé**

Enoncé 36 Soient $E = \mathbb{C}_3[X]$ et $\varphi : P \in E \to P(1-X) \in E$ (**Mines-Ponts :** $E = \mathbb{R}_n[X]$)

1) Montrez φ endomorphisme. (**Mines-Ponts :** Question absente)

2) Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique de E (**Mines-Ponts :** Question absente)

3) L'endomorphisme φ est-il injectif ? bijectif ?

4) Ecrire A^{-1}. (**Mines-Ponts :** Question absente)

5) Donnez les éléments propres de φ.

Mathieu Dore 2021 | RMS 128-792 124-646 *1+2 concours*

On remarque la différence avec Mines-ponts : Il y a moins de questions intermédiaires et c'est un n quelconque alors qu'à Mines-Telecom, c'est $n = 3$. En plus, on demande d'écrire la matrice (4×4) ce qui aide grandement à faire tous les calculs. D'ailleurs on pourrait presque toujours recommander d'écrire une matrice lorsque la taille est ≤ 4...

1) Si on démontre linéaire, attention à prendre les scalaires complexes, même si cela ne change absolument rien dans la démonstration : $\big(\alpha P + \beta Q\big)(1-X) = \alpha P(1-X) + \beta Q(1-X)$. ***Attention !*** à ne pas oublier de démontrer endo qui se traduit ici à vérifier le degré : il est clair que $\deg P(1-X) = \deg P$

2) On calcule les images de la base canonique $\mathscr{E} = (1, X, X^2, X^3)$, puis on « *met en colonnes les coordonnées* » dans la base, qui « *par chance* » est la base canonique, ***donc les coordonnées sont les coefficients***...

$$\varphi(1) = 1 \quad \varphi(X) = -X+1 \quad \varphi(X^2) = X^2-2X+1 \quad \varphi(X^3) = -X^3+3X^2-3X+1 \qquad A = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathscr{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Matrice triangulaire, donc déterminant / inversible / valeurs propres immédiats. Seuls les vecteurs propres nécessitent un calcul.

3) 0 n'est pas valeur propre d'un endomorphisme en dimension finie 4, donc φ est un isomorphisme, A est inversible et d'ailleurs $\det \varphi = \det A = (-1)^2 \times 1^2 = 1$. Pour répondre à la question proprement, φ est bijective donc injective et et surjective.

4) ***Méthode 1 (générale) :***

On inverse le système associé, facile car triangulaire : $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ avec $X, Y \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. ***Attention :*** $\mathbb{C}$...

$$\left\{\begin{array}{rcl} u &=& x+y+z+t \\ v &=& -y-2z-3t \\ w &=& z+3t \\ \xi &=& -t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& u+v+w+\xi \\ x &=& -v-2w-3\xi \\ z &=& w+3\xi \\ t &=& -\xi \end{array}\right. \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La, il y a des choses à dire : $A^{-1} = A$ donc$A^2 = I$ donc c'est une symétrie !

Méthode 2 (élégante) :

En fait on peut le voir tout de suite : car $1-(1-X) = X$! Vous pigez ?? La transformation φ est involutive (et linéaire) : $\varphi\big(\varphi(P)\big) = \varphi\big(P(1-X)\big) = P\big(1-(1-X)\big) = P(X)$, c'est donc une symétrie, $\varphi = \varphi^{-1}$ et $A = A^{-1}$.

Remarque : On pouvait remarquer (ou l'examinateur poser la question ...). $\mathrm{Sp}\, A = \big\{-1, 1\big\}$: peut-on en déduire symétrie aussi ? Non ! A est une symétrie ssi A ***diagonalisable et*** $\mathrm{Sp}\, A = \big\{-1, 1\big\}$. Et ici, diagonalisable ne « *se voit pas* ».

Pour exemple d'information $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas une symétrie alors que $\mathrm{Sp}\, B = \{-1, 1\}$ (je vous laisse y réfléchir).

5) Reste à trouver les espaces propres. On peut déjà dire que comme c'est une symétrie, A est diagonalisable (c'est quasi du cours, annule le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$) donc les deux espaces propres sont de dimension 2, cad des plans car de multiplicité 2. Cela aide un peu pour « *orienter* » le calcul : les 4 variables en fonction de ***deux*** variables), facile car système triangulaire :

Méthode 1 (générale) :

$$X = AX \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x+y+z+t \\ y & = & -y-2z-3t \\ z & = & z+3t \\ t & = & -t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x \\ y & = & -z \\ z & = & z \\ t & = & 0 \end{array} \right.$$

On a $E(1) = \mathrm{Ker}\,(I-A) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,-1,1,0)\big)$ et de même, $E(-1) = \mathrm{Ker}\,(-I-A) = \mathrm{Vect}\big((1,0,-6,4),(0,1,-3,2)\big)$.
Ne pas oublier de revenir aux polynômes : $E(1) = \mathrm{Vect}\big(1, -X+X^2\big)$ et $E(-1) = \mathrm{Vect}\big(1-6X^2+4X^3, X-3X^2+2X^3)\big)$

Méthode 2 (mentale) :

On peut chercher (et trouver) 2 polynômes indépendants tels que $P(X) = P(1-X)$: d'abord $P = 1$ puis, en réfléchissant un peu, $X(1-X)$.

Pour $P(1-X) = -P(X)$ c'est plus dur. Le résultat plus haut...Il faut « *sentir la symétrie/imparité* » par rapport à $\frac{1}{2}$:
L'égalité s'écrit :

$$P\Big(\frac{1}{2} + \big(\frac{1}{2} - X\big)\Big) = -P\Big(\frac{1}{2} - \big(\frac{1}{2} - X\big)\Big) \iff Q\Big(\frac{1}{2} - X\Big) = -Q\Big(-\big(\frac{1}{2} - X\big)\Big) \text{ avec } Q(Y) = P\Big(\frac{1}{2} + Y\Big)$$

Les polynômes impairs sont engendrés par les $(X^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, donc ici, je vous laisse y réfléchir, ce sont les $\big((\frac{1}{2} - X)^{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour des raisons de degré, il subsiste $\frac{1}{2} - X$ et $\big(\frac{1}{2} - X\big)^3$. Je vous laisse vérifier qu'ils engendrent le même plan que plus haut.

Remarque : Si on raisonne dans $\mathbb{C}_n[X]$, et qu'on a assimilé la méthode précédente, on a $E_\varphi(1) = \mathrm{Vect}\big((X-\frac{1}{2})^{2i}\big)_{0\le 2i\le n}$ et On a $E_\varphi(-1) = \mathrm{Vect}\big((X-\frac{1}{2})^{2i+1}\big)_{0\le 2i+1\le n}$. Excellent exercice de vérifier que l'on retrouve bien les espaces propres de la méthode 1.

CCP PSI 2021-2019 (matrice $X\,{}^tX$) ✌ **Détaillé**

Enoncé 37 Soit $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = X\,{}^tX$.

1) Déterminez le rang et le spectre de A.

2) Calculez le polynôme caractéristique de A.

3) Montrez l'égalité $\det(I_n + A) = 1 + {}^tXX$.

BEOS 6334 RMS 130-1206 *1+1 concours*

1) Se rappeler la différence entre ${}^tXY$ et $X\,{}^tY$, pour $\boxed{X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. En fait ${}^tXY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $X\,{}^tY \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Plus précisément ${}^tXY = \left(X \mid Y\right)_{can}$, le produit scalaire canonique ***sur*** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et c'est du cours, et d'ailleurs ${}^tXY = {}^tYX$.

Par contre, $X\,{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice où toutes les colonnes sont colinéaires à X, $C_i = y_i X$. $X\,{}^tY \neq Y\,{}^tX$ ***mais*** ${}^t(X\,{}^tY) = Y\,{}^tX$, là par-contre, ce n'est pas du cours :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ \underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & \cdots & x_n\end{pmatrix}}_{{}^tX} & \underbrace{\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i\end{pmatrix}}_{{}^tXY}\end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\\ \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}_{X} & \underbrace{\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix}}_{X\,{}^tY}\end{array}$$

On a $\operatorname{rg} X\,{}^tX = 1$ car toutes les colonnes sont colinéaires à X ***et aussi*** $X \neq 0$. Dans le cas général, $\operatorname{rg} X\,{}^tX \leq 1$ et le rang est nul ssi $X = 0$. Donc par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$. La multiplicité de la valeur propre 0 vérifie alors $\mu(0) \geq n-1$. On calcule la dernière valeur propre (qui peut être 0 !) par la trace :

$$\operatorname{tr}(X\,{}^tX) = 0 + \cdots + 0 + \lambda \quad \text{soit} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^tXX$$

Conclusion : $\operatorname{Sp} A = \left\{0, {}^tXX\right\}$

2) La question précédente permet d'écrire $\chi_A = \lambda^{n-1}(\lambda - {}^tXX)$

3) Si A a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, en raisonnant dans $\mathbb{C}$ et en les comptant avec leur multiplicité, alors $\alpha I + \beta A$ a pour valeurs propres $\alpha + \beta\lambda_1, \dots, \alpha + \beta\lambda_n$. On peut considérer que c'est quasiment du cours. si on veut le redémontrer, on trigonalise dans $\mathbb{C}$: on sait que toute matrice A peut s'écrire $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire et les valeurs propres sur la diagonale. Comme $\alpha I + \beta A = P(\alpha I + \beta T)P^{-1}$, que $\alpha I + \beta T$ est triangulaire et que les éléments diagonaux ont les $\alpha + \beta\lambda_i$, le résultat suit.

$I_n + A$ a donc pour valeurs propres $1+0$ à la multiplicité $n-1$ et $1 + {}^tXX$ à la multiplicité 1. Son déterminant est le produit des valeurs propres, soit $\det(A) = 1^{n-1} \times (1 + {}^tXX) = 1 + {}^tXX$

CCP PSI 2021 (polynome annulateur) **Détaillé**

Enoncé 40

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4 = 4M^2$ et 2 et -2 sont valeurs propres de M.

1) On suppose M non inversible. Montrez $\operatorname{Sp} M = \{0, -2, 2\}$.

2) Montrez M diagonalisable.

Adrien Michaut 2021 RMS 132-1140

1) M est non inversible, donc a pour valeur propre 0. D'après les hypothèses, on a donc $\operatorname{Sp} M \supset \{0, 2, -2\}$. D'autre part M annule le polynôme $P(X) = X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$, on sait alors $\operatorname{Sp} M \subset \{0, -2, 2\}$. La double inclusion amène le résultat demandé.

2) Le polynôme annulateur P ***n'est pas*** scindé à racines simples, on n'en déduit donc rien (on ne fait ***pas*** l'erreur de raisonnement d'en déduire non diagonalisable!). Pour être plus précis, il est scindé mais pas à racines simples puisque 0 est racine double. On distingue 2 cas :

- M n'est pas inversible. Q1 a établi $\operatorname{Sp} M = \{0, -2, 2\}$. Or M est d'ordre 3 et a 3 vp ***distinctes***, elle est donc diagonalisable.
- M est inversible, on peut donc ***multiplier à gauche*** l'équation matricielle 2 fois par M^{-1}. On en tire $M^2 = 4I$, soit M annule $Q(X) = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ qui, cette fois ci, est ***scindé à racines simples***. M est donc diagonalisable.

CCP PSI 2021 | TPE PSI 2016 (equation matricielle avec transposée) **Détaillé** ☜

Enoncé 41 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

1) Montrez que si un polynôme P annule M, alors les vp de M sont des racines de P (**2016 :** Q. absente)

2) On suppose M symétrique. M est-elle diagonalisable ? Montrez $\det(M) \times \mathrm{tr}(M) \neq 0$.

3) On ne suppose plus M symétrique. Montrez M diagonalisable.

4) On suppose M inversible. Montrez 1 n'est pas vp de M puis M symétrique. (**2016 :** ssi 1 pas vp et pas Q. symétrique)

Gabriel Joachim 2021 | RMS 132-1141 127-1261 *1+1 concours*

1) C'est du cours ! à redémontrer donc : si $P(M) = 0$, $\mathrm{Sp}\, M \subset Rac(P)$ Je ne le re-fais pas ici.

2) Il y a un piège ! C'est (peut-être) faux si elle est (vraie) ***complexe*** ! Mais l'équation s'écrit alors $M^2 + M = I_n$, ce qui nous donne le polynôme annulateur $X^2 + X - 1$ de racines $\alpha, \alpha' = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, scindé à racines simples donc diagonalisable (dans $\mathbb{C}$à priori ! D est réelle, mais, à priori, P pourrait être complexe). 0 n'est pas valeur propre donc M inversible, soit $\det(M) \neq 0$. Si on note p la multiplicité de α avec $0 \leq p \leq n$, alors celle de α' est $n - p$, ce qui amène :

$$\mathrm{tr}\,(M) = p\frac{1+\sqrt{5}}{2} + (n-p)\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{n}{2} + (2p-n)\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Si $\mathrm{tr}\,(M) = 0, \sqrt{5} = \dfrac{n}{n-2p}$ est ***rationnel. Absurde !***

3) On cherche un polynôme annulateur en essayant de se « *débarrasser* » de la transposée. De l'équation on tire $({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$, formule du binôme de **Newton** [1] ***valide*** puisque les deux matrices M^2 et I_n commutent. En passant à la transposée dans l'équation on obtient aussi : ${}^t(M^2) = {}^t(I_n - {}^tM) = I_n - M$. L'égalité amène $M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$, soit $M^4 - 2M^2 + M = 0$.

Le polynôme $X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\alpha')$ est donc ***annulateur*** de M avec $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On en déduit $\mathrm{Sp}\, M \subset \{0, 1, \alpha, \alpha'\}$. Le polynôme étant ***scindé à racines simples***, la matrice est diagonalisable (à priori dans $\mathbb{C}$). Si la matrice est réelle, le polynôme annulateur est scindé à racines simples réelles donc la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

1. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

III — Algèbre Linéaire

CCINP PSI 2021 (matrices dans bases adaptées à noyau et image) ✷ **Détaillé**

Enoncé 46

1) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg} u = n$.

(i) Montrez $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.

(ii) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg} u = 2n$.

(i) Montrez $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.

(ii) En déduire il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

RMS 132-1128

1) Je rappelle que $f \circ g = 0 \iff \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. On peut considérer que c'est du cours. L'hypothèse $u^2 = 0$ amène donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Puis le théorème du rang joint aux hypothèses $\operatorname{rg} u = n$ et $\dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$, amène $\dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u = n$ et par inclusion et égalité de dimensions, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

Une petite analyse est souvent nécessaire pour trouver « *une base telle que la matrice est ...* » ou la « *matrice semblable à ...* ».

Analyse :
Si une base $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ convient, elle vérifie $u(e_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $u(e_{i+n}) = e_i$ (pour les n dernières colonnes. On demande de déduire de $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$: il faut comprendre $e_i \in \operatorname{Ker} u$ donc $\operatorname{Im} u$ donc c'est un u d'un vecteur (c'est le e_{i+n}). ***Sauf qu'il ne faut pas*** prendre n'importe quel vecteur, sinon on n'aura jamais base dans la synthèse. En fait, il faut les prendre dans un supplémentaire du noyau. Si on c'est son cours (voir synthèse), l'analyse est donc terminée ! Je sais que ceci est toujours difficile à comprendre.

Synthèse :
Soit F un supplémentaire du noyau : $\operatorname{Ker} u \oplus F = \mathbb{R}^{2n}$. ***On sait alors*** (relire votre cours de Sup) que la restriction de u (que l'on peut noter u') est un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im} u$. En fait, c'est le théorème du rang, ***version théorique***.
Prenons une base de $\operatorname{Ker} u$: $(e_1, \dots, e_n)$. Il y en a n car $\dim \operatorname{Ker} u = n$. $e_i \in \operatorname{Im} u$ donc ***il existe*** $f_i \in F$ (unique en fait) tel que $u'(f_i) = u(f_i) = e_i$. Si vous avez bien suivi, il reste essentiellement à montrer $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{R}^{2n}$. La matrice sera de la forme voulue en vertu de l'analyse...
Comme u' est un isomorphisme, $(f_1, \dots, f_n)$ est bien une base de F. Par supplémentarité, la réunion des 2 bases de cardinal n donne bien une base de $\mathbb{R}^{2n}$. La matrice est aussi de la forme voulue :

- $u(e_i) = 0$ car le e_i sont dans le noyau. Les n premières colonnes sont nulles. Ok.
- $u(f_i) = e_i$. Les ***coordonnées de*** e_i dans la base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, \dots 0)$ avec le 1 à la position i. La colonne « *correspondant* » à f_i (la $i + n^{\text{e}}$) est bien de la forme voulue. Ok.

2) C'est la même question en plus dur. $u^3 = u^2 \circ u = u \circ u^2 = 0$. On en déduit $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. J'en profite pour rappeler la suite des noyaux itérés (et des images), certes ce n'est pas du cours mais c'est souvent utile de le savoir (je ne le redémontre pas ici). On a donc (toujours) $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$. Ceci nous donne donc beaucoup d'inclusions... On a aussi 2 applications du théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = 3n$ et $\dim \operatorname{Ker} u^2 + \dim \operatorname{Im} u^2 = 3n$. Quoi va servir ?

L'hypothèse $\operatorname{rg} u = 2n$ nous amène $\dim \operatorname{Ker} u = n$. On a l'inclusion $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u^3$ avec $\dim \operatorname{Ker} u^3 = 3n$ car $u^3 = 0$. On peut « *conjecturer que probablement* » $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2n$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u^2 = n$ puis inclusion et même dimension, $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u$.

Montrons la conjecture. C'est assez délicat, il faut utiliser une fonction auxiliaire judicieuse qui nous donnera le résultat, via le théorème du rang appliqué à cette fonction. Considérons $u' : x \in \operatorname{Im} u \longrightarrow u(x)$. On a donc $\operatorname{Im} u' \subset \operatorname{Im} u^2$ (je vous laisse y réfléchir). $\operatorname{Ker} u' = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$: je rappelle que si on restreint un morphisme u à un sev F son noyau est immédiatement $F \cap \operatorname{Ker} u$. Montrons $\operatorname{Im} u' = \operatorname{Im} u^2$ à l'aide de l'inclusion réciproque : soit $x \in \operatorname{Im} u'$ donc $x = u'(y) = u(y)$ avec $y \in \operatorname{Im} u$, soit $y = u(z)$. Finalement $x = u^2(z) \in \operatorname{Im} u^2$. Ok. Le théorème du rang appliqué à u' s'écrit :

$$\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker} u' + \dim \operatorname{Im} u' = \dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) + \dim \operatorname{Im} u^2 \implies \dim \operatorname{Im} u^2 \geq \dim \operatorname{Im} u - \dim \operatorname{Ker} u = n$$

En fait cela nous suffit car $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et $\dim \operatorname{Im} u^2 \geq n = \dim \operatorname{Ker} u$ nous donne aussi l'égalité.

Ici, je ne vous traite pas l'analyse, je vous laisse la traiter de votre côté, c'est assez similaire quoique plus compliqué. Je procède directement à la synthèse. Si on peut effecteur une démonstration sans analyse, c'est mieux, cela prouve qu'on a les idées claires.
Soient F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, soit $F \oplus \operatorname{Ker} u = \mathbb{R}^{3n}$ ***et*** G un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ ***dans*** $\operatorname{Im} u$: $\operatorname{Ker} u \oplus G = \operatorname{Im} u$. C'est possible puisque $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$. Alors u induit (par restriction) un isomorphisme, noté u'', de G dans $u(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} u^2$. On prend $(e_1, \dots, e_n)$ base de $\operatorname{Ker} u$, puis comme $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$, $g_i \in G$ tel que $u''(g_i) = u(g_i) = e_i$. Comme $g_i \in \operatorname{Im} u$, on prend de manière similaire $f_i \in F$ tel que $u(f_i) = g_i$. La base $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_n)$ convient.

Montrons d'abord que la matrice a la forme voulue :

- Les e_i sont dans le noyau donc les n premières colonnes sont nulles. Ok.
- Les n colonnes suivantes « *correspondent* » aux images des g_i, soit $u(g_i) = e_i$. Donc la $n+i^{\text{e}}$ colonne a pour coordonnée que des 0 sauf un 1 en position i. Je vous laisse réfléchir au fait que cela donnera bien un bloc I_n avec un « *décalage* » de n soit en position 1.
- Les n dernières colonnes « *correspondent* » aux images des f_i, soit $u(f_i) = g_i$. Donc la $2n+i^{\text{e}}$ colonne a pour coordonnées que des 0 sauf un 1 en position $n+i$ (la position de g_i dans la base). Ok.

Reste à montrer $(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_n, f_1, \dots, f_n)$ base de $\mathbb{R}^{3n}$ soit famille libre par cardinalité. On part de :

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_n g_n + \gamma_1 f_1 + \cdots + \gamma_n f_n = 0$$

Notons que par l'isomorphisme de u'', $(g_1, \dots, g_n)$ est une base de G puis, par supplémentarité, la réunion des 2 bases $(e_1, \dots, g_1, \dots, g_n)$ est une base de $\operatorname{Ker} u \oplus G = \operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u^2$. On applique u^2 et sa linéarité : on arrive donc à

$$\gamma_1 u^2(f_1) + \cdots + \gamma_n u^2(f_n) = 0 = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_n e_n$$

La liberté de $(e_1, \dots, e_n)$, car base de $\operatorname{Ker} u$, amène les $\gamma_i = 0$, puis $\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n + \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_n g_n = 0$ et leur liberté vue 3 lignes plus haut amène $\alpha_i = \beta_i = 0$.

IV — Algèbre Euclidienne

CCP PSI 2021-2015-2014 | Mines PSI 2016-2011 | Ensam PSi 2013 | CCP PC 2009 | Mines-Ponts PC 2012(matrice normale nilpotente) **Détaillé**

Enoncé 57 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$ et $A^p = 0$. En considérant $B = {}^tAA$, montrez $A = 0$.
(**CCP 2015-2014 :** Montrez $A\,{}^tA$ nilpotente, puis trouvez tous les A.) (**Mines :** pas d'indication) .

RMS 132-1150 127-699 124-1217 123-586 122-557 120-1057 | ODLT 22-234 21-280 *1+7 concours*

On pose $M = {}^tAA$. M est symétrique car ${}^tM = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = M$.
Il faut avoir déjà vu que pour A ***quelconque***, ${}^tAA$ ou $A\,{}^tA$ ou même $A + {}^tA$ sont ***toujours symétriques***.

A est nilpotente car $A^p = 0$. X^p étant un polynôme annulateur, ceci prouve que 0 est la seule valeur propre possible d'une matrice nilpotente, soit $\operatorname{Sp} A \subset \{0\}$ (et l'est effectivement, cad il y a égalité, car elle n'est pas inversible)

M est alors aussi nilpotente car $M^p = ({}^tAA)^p = ({}^tA)^p\ A^p = 0$ ***car*** A et ${}^tA$ commutent. Par le théorème spectral, M est diagonalisable et comme sa seule valeur propre est 0, donc il existe P orthogonale $M = PDP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(0,\dots,0)\,{}^tP = 0$

Remarque : Si A et B commutent, $(AB)^2 = A^2B^2$ mais sinon cette égalité est (en général) fausse : on a lors $(AB)^2 = ABAB$. Comparez les deux visuellement.

On va maintenant établir que si ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$, pour une matrice quelconque.

Méthode 1 (par utilisation de ${}^tX$***) :***

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,{}^tAAX = 0 = {}^t(AX)\,(AX) = \|AX\|^2_{can} \quad \Longrightarrow AX = 0$$

Comme c'est ***pour tout*** X, la matrice A est nulle. On a utilisé la norme euclidienne / produit scalaire canonique ***sur*** $\boxed{\mathcal{M}_{\mathbf{n,1}}(\mathbb{R})}$: $\left(X\,|\,Y\right) = {}^tXY$.

Méthode 2 :

$$\operatorname{tr}({}^tAA) = 0 \quad \Longrightarrow \|A\|^2_{can} = 0 \Longrightarrow A = 0$$

Attention! On a utilisé ***ici*** la norme / produit scalaire canonique ***sur*** $\boxed{\mathcal{M}_{\mathbf{n,n}}(\mathbb{R})}$: $\left(A\,|\,B\right) = \operatorname{tr}({}^tAB)$. Comparez visuellement les deux.

CCP PSI 2021-2019-2018 (distance à un sev) **Détaillé**

Enoncé 69 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$.

1) Calculez A_n en distinguant 2 cas selon la parité de n. Donnée : $A_0 = 1$.

2) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. Vérifiez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Calculez $d\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big)$.

RMS 132-1149 130-1221 129-1175 *1+2 concours*

1) Je rappelle que si une fonction est paire (et l'intégrale existe!), $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$ et si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f = 0$. Montrons rapidement que A_n existe :

- ***continuité*** de $f_n(t) = t^n e^{-t^2}$ sur $\left]-\infty, +\infty\right[$.
- critère $t^2 f(t)$ en $\pm\infty$: $\lim_{\pm\infty} t^2\, f_n(t) = 0$ ce qui amène l'***intégrabilité*** sur $\left]-\infty, +\infty\right[$.

La fonction f_n étant impaire pour n impair, $I_n = 0$. Pour $2n$ pair, on effectue une ipp avec $u = e^{-t^2}$ $v' = t^{2n}$ $u' = -2te^{-t^2}$ $v = \frac{t^{2n+1}}{1n+1}$.

$$I_{2n} = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{2n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} I_{2n+2}$$

On a ***pu appliqué directement*** l'ipp en $+\infty$ car la deuxième intégrale converge car on a reconnu I_{2n+2}. On a :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2} I_{2n} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2^2} I_{2n-2} = \frac{(2n+1)(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}{2^{n+1}}\ I_0 \quad \textbf{car le dernier est } I_2 = \frac{1}{2} I_0$$

On en déduit (démonstration par récurrence immédiate :

$$I_{2n+2} = \frac{(2n+1)!}{2n(2n-2)\times\cdots\times 2\ 2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\ n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\ (n+1)!} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\ n!}}$$

2) L'existence de l'intégrale $\varphi(P,Q)$ résulte de la continuité de la fonction sur $\mathbb{R}$ et du critère $t^2 f(t) \longrightarrow 0$ en $\pm\infty$ par croissances comparées ***parce que ce*** sont des polynômes. La symétrie est immédiate de même que la bilinéarité. La positivité aussi car $\varphi(P,P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \geq 0$ car la fonction est positive (on est dans $\mathbb{R}$). Reste à prouver définie :

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = 0$. La fonction-intégrande étant ***continue et positive***, on en déduit sa nullité ce qui amène ensuite que le polynôme est nul.

3) On applique le théorème sur la distance à un sev dans les evs euclidiens, avec distance et norme euclidienne associées au produit scalaire de l'énoncé :

$$d^2\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big) = \|X^3 - p(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2$$

où p désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule immédiatement :

$$\|X^3\|^2 = \varphi(X^3, X^3) = \int_{\mathbb{R}} t^6 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = A_6 = \frac{12!}{2^{12}\ 6!} = \frac{10395}{64}$$

Pour calculer la 2ième norme, il faut d'abord calculer le projeté que l'on calcule à l'aide de la formule du projeté orthogonal. A cette fin, il faut contruire une BON de $\mathbb{R}_2[X]$ que l'on construit par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base quelconque $(1, X, X^2)$. On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X + \alpha$ tq $(P_1|P_0) = 0$ et $P_2 = X^2 + \beta X + \gamma$ tq $(P_2|P_1) = [P_2|P_0) = 0$. On a :

$$(P_1|P_0) = (X + \alpha|1) = (X|1) + \alpha - 1|1) = I_1 + \alpha I_0 = \alpha I_0 = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$

$$(P_2|P_0) = (X^2|1) + \beta(X|1) + \gamma(1|1) = I_2 + \beta I_1 + \gamma I_0 = 0 \Longrightarrow \gamma = -I_2 = -\frac{1}{2}$$

$$(P_2|P_1) = (X^2|X) + \beta(X|X) + \gamma(1|X) = I_3 + \beta I_2 + \gamma I_1 = 0 \Longrightarrow \beta = 0$$

$\left(1, X, X^2 - \frac{1}{2}\right)$ est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et il vient alors que $\left(\frac{1}{\|1\|}, \frac{X}{\|X\|}, \frac{X-\frac{1}{2}}{\|X^2-\frac{1}{2}\|}\right)$ est une base orthonormée. En appliquant la formule du projeté orthogonale, il vient :

$$p(X^3) = \frac{\left(X^3 \mid 1\right)}{\|1\|^2}\, 1 + \frac{\left(X^3 \mid X\right)}{\|X\|^2}\, X + \frac{\left(X^3 \mid X^2 - \frac{1}{2}\right)}{\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2}\left(X^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Je vous laisse donc réfléchir au fait que l'on a donc :

$$\|p(X^3)\|^2 = \frac{\left(X^3 \mid 1\right)^2}{\|1\|^2} + \frac{\left(X^3 \mid X\right)^2}{\|X\|^2} + \frac{\left(X^3 \mid X^2 - \frac{1}{2}\right)^2}{\|X^2 - \frac{1}{2}\|^2} = \frac{I_3^2}{I_0^2} + \frac{I_4^2}{I_2} + \frac{(I_5 - \frac{1}{2} I_3)^2}{I_4 + \frac{1}{4} I_0 - I_2} = \frac{9}{8}$$

CCP PSI 2021-2016 (produit scalaire) **DÉTAILLÉ**

ENONCÉ 71 Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application $\varphi : (P,Q) \longrightarrow < P,Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1) Montrez que c'est un produit scalaire.

2) Montrez que l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donnez sa dimension.

3) Calculez $d(1,E)$.

RMS 132-1148 127-1268 *1+1 concours*

1) φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

- ***forme*** car $\varphi(P,Q)$ est visiblement un réel.
- ***symétrique*** immédiat.
- ***bilinéaire*** car linéaire à gauche : $\varphi(\alpha P+\beta R,Q) = \alpha\varphi(P,Q)+\beta\varphi(R,Q)$: immédiat par linéarité de la dérivation. La linéarité à droite résulte de la symétrie.
- ***positive :*** pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2 \geq 0$ car ce sont des réels.
- ***définie :*** Si P vérifie $\varphi(P,P) = 0$, il suit $\forall\, 0 \leq k \leq n, P^{(k)}(1) = 0$. Ceci ***se traduit*** par 1 est ***racine de multiplicité*** $n+1$ de P (***Attention!*** $n+1$, pas n!). Ceci est impossible pour un polynôme de degré $\leq n$ sauf le polynôme nul. Ok.

2) Si l'on considère $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P(1)$, c'est clairement une forme linéaire et $E = \operatorname{Ker}\psi$. Pare suite, E est un hyperplan cad un sev de dimension $n+1-1 = n$.

3) On applique le théorème du cours $d^2(1,E) = \|1\|^2 - \|p(1)\|^2$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire, cad ici $\|P\|^2 = \varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(1)\right)^2$, et p la projection orthogonale sur E.

Vu que $E^\perp$ est une droite, il est plus adroit d'utiliser la projection orthogonale q sur $E^\perp$ qui vaut $q = \mathrm{Id} - p$. On applique la formule du projeté orthogonale, très simple ici puisque c'est une droite : il suffit de trouver un vecteur (normé ou unitaire), noté Q, de $E^\perp$.

On effectue une petite analyse; un tel polynôme doit vérifier, pour tout $P \in E$, cad pour tout P tel que $P(1) = 0$, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = 0$, soit $\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1) = 0$. Il faut trouver que Q polynôme constant convient ... On prend donc $Q = 1$. On calcule $\|Q\|^2 = 1$. Par suite, $q(P) = \varphi(P,1)1 = P(1)$!! donc $p(1) = \mathrm{Id}(1) - q(1) = 1-1 = 0$. La réponse est donc $d(1,E) = 1$.

CCP PSI 2021 (inf intégrale) **DÉTAILLÉ**

ENONCÉ 77 On pose $m = \inf \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(x) - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x$.

1) Montrez l'existence de m.

2) Trouvez des réels a, b, c réalisant cet inf. (Ind :on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gramm-Schmidt).

Yassine Kalloo 2021

1) En se plaçant sur l'ev $\mathscr{C}^0\left(\left[-\pi,\pi\right], \mathbb{R}\right)$ et le produit scalaire usuel associé $\left(f \mid g\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. On sait que $d^2(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x$ est la distance euclidienne canoniquement associée et que m existe puisqu'il réalise alors la distance de $f(x) = \cos(x)$ au $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_2[X]$, engendré par $(1, x, x^2)$.

2) Le cours nous apprend que $P(X) = aX^2 + bX + c$ réalisant l'inf est obtenu par la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_2[X]$. $(1, X, X^2)$ n'est pas une BON de $\mathbb{R}_2[X]$, pour se produit scalaire-là en tous cas, car par exemple, $\left(1 \mid X^2\right) = \frac{2}{3}\pi^3$. On ne peut alors appliquer la formule avec cette base, il faut utiliser le procédé de Schmidt pour en construire une (Q_0, Q_1, Q_2) :

- $Q_0 = 1$
- $Q_1 = X + \alpha$ tel que $0 = \left(Q_0 \mid Q_1\right) = \int_{-\pi}^{\pi}(x+\alpha)\,\mathrm{d}x = 2\pi\alpha \iff \lambda = 0$
- $Q_2 = X^2 + \beta X + \gamma$ tq $0 = \left(Q_0 \mid Q_2\right) = \int_{-\pi}^{\pi}(x^2+\beta x+\gamma)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^3 + 2\pi\gamma$ et $0 = \left(Q_1 \mid Q_2\right) = \int_{-\pi}^{\pi}(x^3+\beta x^2+\gamma x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\beta\pi^3$ ce qui amène $\beta = 0$ et $\gamma = -\frac{1}{3}\pi^2$

Cette base est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. Par application de la formule, le projeté est alors :

$$\frac{\left(\cos(x) \mid Q_0\right)}{\|Q_0\|^2} Q_0(X) + \frac{\left(\cos(x) \mid Q_1\right)}{\|Q_1\|^2} Q_1(X) + \frac{\left(\cos(x) \mid Q_2\right)}{\|Q_2\|^2} Q_2(X) = \boxed{-\frac{45}{2} X^2 + \frac{15}{2\pi^2}}$$

J'ai juste mis le résultat : il y a 3 intégrales à calculer avec du cosinus dont une avec un polynôme de degré 2. On peut utiliser le fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur $\left[-\pi,\pi\right]$ est nulle pour accélérer le calcul.

Je vous donne la valeur de m, non demandée puisque le logiciel de calcul formel fait tout lui-même et si on doute que c'est l'inf, par exemple je prend un polynôme (pair!) trè s« *petit* », $R = 2.3 \times 10^{-29} X^2 + 1.7 \times 10^{-23}$. Pour info, j'ai mis calculer sur 40 chiffres décimaux pour éviter les erreurs d'arrondis (Eh oui, c'est possible... Avec python aussi mais il faut charger un package approprié (sinon c'est 53 bits binaires $\simeq$ une dizaine de chiffres décimaux...)

$$m = d^2\left(\cos(x), P(x)\right) = \frac{1}{\pi^3}(-90+\pi^4) \simeq 0.2389 \qquad d^2\left(\cos(x), R(x)\right) \simeq 3.1415926535897932384626433838575559324$$

Question (facile) : La dernière de dernière de dernière. Qu'ai-je mis en bleu?

V — Séries : Convergence, Calcul de Sommes et de Rayons de Convergence

CCP PSI 2021-2017-2011 (série à terme intégral) **Détaillé**

Enoncé 92 Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrez que la suite (a_n) est convergente et déterminez $\lim a_n$.

2) Montrez que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

3) Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{n+1}$. (**2011 :** question absente) .

4) Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

5) Trouvez une équation différentielle vérifiée par f. (**2017-11 :** question absente) .

RMS 132-1170 128-1350 122-1259 *1+2 concours*

1) On pose $f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ et on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $I = \left[0,1\right]$

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** I **:**

  On remarque que, à t fixé c'est une suite géométrique. Par suite, si $0 \leq t < 1$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1+t^2}{2} < 1$ et donc $f_n(t) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ mais par contre, si $t = 1$, $f_n(t) = 1 \xrightarrow{n\to+\infty} 1$.

  Il y a donc convergence simple vers la fonction ***continue par morceaux*** sur $\left[0,1\right]$, notée f, qui est nulle sur $\left[0,1\right[$ et valant 1 en 1.

- ***Hypothèse de Domination sur*** I **:**

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| = \left|\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1+1}{2}\right)^n = 1 = \xi(t)$$

  La majoration résulte de $0 \leq t^2 \leq 1$. ξ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur I c'est une constante! en rappellant qu'une constante n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (sauf 0).

On conclut $\lim a_n = \lim \displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_{[0,1[} 0 = 0$.

Remarque : Il était prévisible que la ***suite*** tende vers 0 car on étudie les séries associées dans les questions suivantes.

2) La série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie les propriétés suivantes :

- La série est bien alternée car $a_n \geq 0$ du fait de la fonction-intégrande positive : c'est un carré (réel).
- $a_n \longrightarrow 0$ d'après la question précédente.
- $\left|(-1)^n a_n\right| = a_n \searrow$ comme cela résulte de la croissance de l'intégrale t et des propriétés des suites géométriques :

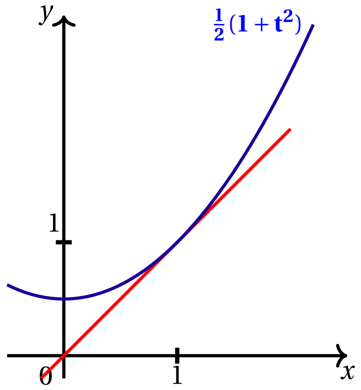
$$\forall\, t \in \left[0,1\right],\ 0 \leq \frac{1=t^2}{2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Attention quand même à vérifier que les bornes de l'intégrale sont dans le sens correct! Du critère C.S.S.A, il résulte que la série converge.

3) Question un peu délicate … on va montrer $\dfrac{1+t^2}{2} \geq t$

Méthode 1 (graphique)

C'est pas parfait mais c'est mieux que rien. Je ne justifie pas ici les tracés



Méthode 2 :
Vous étudier les variations de la fonction auxiliaire différence mais ***uniquement*** sur $[0,1]$. Je ne le traite pas ici.

Méthode 3 (convexité)
C'est limite-programme mais cela passera (uniquement si vous connaissez bien le thème!). La fonction $f(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)$ est ***convexe sur*** $[0,1]$ (et même $\mathbb{R}$) car $f''(t) = 1 \geq 0$ donc au-dessus de sa tangente en $(1,1)$ qui a pour équation $y = t$.

On en déduit alors $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geq \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

4) Ici, il est assez difficile d'appliquer la règle de d'Alembert pour trouver le rayon de convergence car la limite est du type $\frac{0}{0}$, ce qui vous oblige à travailler les équivalents/dls, très délicats lorsque c'est une intégrale (il n'y a aucun théorème en PSI). On va donc procéder à un encadrement de a_n par deux coefficients qui donneront des séries entières de ***même rayon***, méthode inspirée par la question précédente qui donne déjà un côté :

- de $a_n \geq \frac{1}{n+1}$, on tire que le rayon est plus petit que celui de la série entière $\sum \frac{1}{n+1} x^n$. A celle-ci, on pourrait appliquer la méthode de d'Alembert mais c'est maladroit! c'est une série connue : c'est $\frac{1}{x}\big(-\ln(1-x)\big)$ (je vous laisse y réfléchir) qui a pour rayon 1, soit $R \leq 1$.
- De l'autre côté on écrit tout simplement $a_n \leq 1$, comme d'ailleurs on l'a déjà vu. on en déduit que R est donc plus grand que le rayon de la série entière $\sum 1 x_n$. On aura reconnu la série géométrique de rayon 1;

Finalement $R = 1$.

5)

CCP PSI 2021-2019 (suite récurrente et série) **Détaillé**

Enoncé 96 Soit (a_n) une suite de réels ≥ 0 et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\Big)$.

1) Montrez pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} a_n$.

2) Montrez que si $\sum a_n$ converge, alors (u_n) converge.

3) Etudiez la réciproque. (*Indication :* considérez $u_n = \frac{n}{n+1}$).

Gabriel Joachim 2021 | RMS 132-1163 130-1236 *1+1 concours*

1) Par récurrence immédiate $u_n \geq 0$. Il suit :

$$(u_n + a_n)^2 = u_n^2 + a_n^2 + 2a_n u_n \geq u_n^2 + a_n^2 \quad \Longrightarrow \quad u_n + a_n = \sqrt{(u_n + a_n)^2} \geq \sqrt{u_n^2 + a_n^2}$$

par ***croissance*** de la racine carrée et ***positivité*** de $u_n + a_n$. Puis

$$0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\Big(-u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}\Big) \leq \frac{1}{2}\, a_n$$

2) Je rappelle qu'on a ***équivalence*** de la ***suite*** (x_n) converge avec la ***série*** $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge. Dit plusieurs fois en cours, c'est quasiment du cours. Cela vient du fait qu'une série converge ***ssi*** la ***suite*** de ses sommes partielles (S_n) converge. Or, par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

Revenons à notre exo :par critère de majoration d'une série ***positive*** d'après Q1, la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite (u_n) converge.

3) La suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1. Or, la récurrence donne $a_n = 2\sqrt{u_{n+1}}\sqrt{u_{n+1} - u_n}$ car :

$$2u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \quad \Longrightarrow \quad 4u_{n+1}^2 + u_n^2 - 4u_n u_{n+1} = u_n^2 + a_n^2 \quad \Longrightarrow \quad a_n^2 = 4u_{n+1}\,(u_{n+1} - u_n)$$

Comme $a_n \geq 0$, on effectue un équivalent (un petit dl est une perte de temps) :

$$a_n = 2\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sqrt{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}} \sim 2\sqrt{1}\sqrt{\frac{1}{(n+2)(n+1)}} \sim 2\,\frac{1}{n}$$

La série $\sum a_n$ diverge donc. La réciproque est fausse.

VI — Séries et Suites de Fonctions

CCINP PSI 2021 (calcul intégrale par développement en série) **Détaillé**

Enoncé 101 Soit f définie sur $I = \left]0,1\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

1) Vérifiez f est prolongeable par continuité en 1.

2) Justifiez l'intégrabilité de f sur I.

3) Donnez, au voisinage de 1, un développement de f en série entière.

4) Calculez l'intégrale de f sur I.

RMS 132-1171

1) Si $x \longrightarrow 1$, on pose $u = x-1 \longrightarrow 0$ d'où $\ln(x) = \ln(1+u) \sim_{u=0} u$. On revient à x : $\ln x \sim_1 (x-1)$. On en déduit immédiatement $\lim_1 f(x) = 1$, soit f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = 1$.

2) f vérifie les propriétés suivantes :

- Elle est continue sur $\left]0,1\right]$ (cf question précédente)
- ***Etude en*** $x=0$ **:** $f(x) =\sim_0 -\ln x$. Or ln est intégrable dans un voisinage de 0 : critère $t^a f(t)$ (***Attention!*** en 0 il faut prendre $a<1$) :les croissances comparées amènent $\lim_0 x^{1/2}\ln x = 0$.

On en déduit l'intégrabilité de f sur $\left]0,1\right]$ comme sur $\left]0,1\right[$ d'ailleurs

3) Cette question est, quand même, limite-programme. En fait les développements en série entière sont toujours en 0 à votre programme (on se place sur $\left]-r,r\right[$. En fait, on fait un changement de variable qui ramène en 0, comme plus haut :

$$f(x) = f(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{u}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^n}{n+1}$$

On « *revient* » à x : $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n+1}}$. Le développement est sur $\left]0,2\right[$ (je vous laisse y réfléchir).

Remarque : A noter, que selon votre programme de PSI, ce n'est pas stricto-sensu une série entière...

4) J'espère que vous avez deviné que l'on va être confronté à une intégration terme à terme.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(1)} \int_{]0,1]}\frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(2)} \int_{]0,1]}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n+1}}_{f_n(x)}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(3)} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,1]}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 (x-1)^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left[\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \overbrace{=}^{(4)} \frac{\pi^2}{6}$$

- **(1)** On se place sur $\left]0,1\right]$, cad on « *enlève* » le 0, car le développement en série utilisé après n'est valide que sur cet intervalle. Je rappelle que les intégrales sur $[0,1]$, $\left]0,1\right]$, $\left]0,1\right[$ sont les mêmes. De ce point de vue, la notation $\int_0^1$ est « *opaque* ».
- **(2)** Développement en série de Q3.
- **(3)** On applique le théorème d'intégration terme à terme sur $\left]0,1\right]$:
  - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $\left]0,1\right]$ car ***continues*** sur le segment $[0,1]$.
  - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0,1\right]$ (puisque c'est un développement en série!) et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $\left]0,1\right]$.

- La série numérique $\sum \int_{]0,1]} |f_n|$ converge puisqu'égale à $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n+1}\,dx = \frac{1}{n+1}\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}$

- **(4)** On utilise le résultat usuel $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en vérifiant bien qu'on a ***tous*** les termes. Ce résultat n'est pas du cours. Peut-être que l'examinateur veut tester si vous le savez? Dans tous les cas il vous le rappellera et dans tous les cas, c'est quand même mieux de le connaître…

CCINP PSI 2021 (limite suite intégrale) **Détaillé**

Enoncé 104 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$. Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on précisera.

2) Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?

3) Montrez que l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.

4) Pour $a \in [0,1[$, montrez la suite (I_n) converge et déterminez sa limite.

5) Qu'en est-il pour $a = 1$?

RMS 132-1168

1) Fixons $x \in]0,1]$. $x > 0$ donc $e^{-nx} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Il en suit immédiatement la ***convergence simple*** de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $]0,1]$ vers la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^a(1+x^2)}$

2) On calcule :

$$\forall\, x \in]0,1],\ g_n'(x) = \big(f_n(x) - f(x)\big)' = \left(\frac{-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}\right)' = -e^{-nx}\left(\frac{-n}{x^a(1+x^2)} + \frac{-ax^{a-1} - (2+a)x^{2+a-1}}{x^{2a}(1+x^2)^2}\right) > 0$$

En outre $g_n(x) \le 0$. Il suit, par décroissance de $x \to |g_n(x)|$, $\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in]0,1]}|g_n(x)| = \lim_0 |g_n(x)|$.

Or $g_n(x) = \dfrac{-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)} \sim_0 \dfrac{1}{x^a}$. Donc $\|g_n\|_\infty = +\infty$ ou 1 selon $a \in]0,1]$ ou $a = 0$. Il n'y a donc pas de convergence uniforme ***sur*** $]0,1]$.

3) On a les propriétés suivantes :

- f_n ***continue*** sur $]0,1]$.
- ***Etude en*** $t = 0$ ***:*** $f_n(x) \sim_0 \dfrac{nx}{x^a} = \dfrac{n}{x^{a-1}}$. Par équivalence à une fonction de Riemann, on a f_n ***intégrable*** dans un voisinage de 0 ssi $a - 1 < 1 \iff a < 2$.

Comme $a \in [0,1]$, l'intégrale $\int_0^1 f_n$ est absolument convergente, donc convergente pour tout a.

4) La convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers f étant établie en **Q1**, reste à démontrer la domination :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in]0,1],\ \left|\frac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}\right| \le \frac{1}{x^a(1+x^2)} = \varphi(x)$$

La majoration résulte de $0 \le e^{-nx} \le 1$ car $nx \ge 0$. φ est clairement intégrable sur $]0,1]$ par Riemann en 0 $\varphi \sim_0 \frac{1}{x^a}$ ***mais l'intégrabilité est fausse*** pour $a = 1$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique pour $a \neq 1$ et $\lim I_n = \lim \displaystyle\int_0^1 f_n = \int_0^1 \frac{1}{x^a(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

5)

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-e^{-nx}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{1-e^{-u}}{u(1+u^2/n^2)}\,\mathrm{d}u \ge \int_0^n \frac{1-e^{-u}}{2u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

On a effectué le changement de variables $u = nx$ C^1 et bijectif de $]0,1]$ vers $]0,n]$. La minoration se justifie par $\frac{u^2}{n^2} \le 1$, pour $0 \le u \le n$. Quant à la limite finale, elle provient de la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-u}}{2u}\,\mathrm{d}u$ en la borne $+\infty$ par l'équivalence $\frac{1-e^{-u}}{2u} \sim_{+\infty} \frac{1}{2u}$

CCP PSI 2021-2019 (étude série de fonctions) **Détaillé**

Enoncé 107 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.

2) Montrez S continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Calculez S

BEOS 6043 RMS 130-1247 | Odlt 26-205 — *1+1 concours*

1) On distingue les cas suivants, usuels pour une exponentielle :

- $x = 0$, la série $\sum u_n(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le CSSA.
- $x > 0$, la série $\sum u_n(x)$ converge par le critère $n^\alpha u_n(x)$ puisque $\left|n^2 u_n(x)\right| = ne^{-nx} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ par ***positivité*** de x et croissances comparées.
- $x < 0$, par le « *même critère* » $\lim n^1 \frac{e^{-nx}}{n} = +\infty$, donc la série $\sum u_n(x)$ diverge.

la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ a donc pour domaine de définition $\boxed{\mathrm{Def}\, D = \mathbb{R}^+}$.

2) On applique le théorème de continuité d'une série de fonctions :

- $x \to u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- On constate rapidement que $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$, il n'y a donc pas de convergence normale de la série de fonctions sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, avec $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on aurait $\sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)| = \frac{e^{-na}}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ***car*** $a > 0$ ce qui nous amènerait à la continuité de S sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ceci ne répond pas complètement à la question. IL va falloir utiliser la convergence uniforme (non normale) de la série sur (tout segment de) $\mathbb{R}^+$ toujours plus délicate à mettre en oeuvre.

  On vérifie que ***pour tout*** $x \geq 0$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le CSSA :
  - $\frac{e^{-nx}}{n} \geq 0$ ***pour tout*** x, la série est bien alternée.
  - $|u_n(x)| \to 0$. Immédiat, même pour $x = 0$.
  - $n \longrightarrow e^{-nx} \searrow$ ***car*** $x \geq 0$ et $\frac{1}{n} \searrow$ aussi (attention à ne pas se tromper de variable et ne pas considérer la décroissance par rapport à x!). Comme les deux termes sont positifs, $|u_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$ décroit aussi ***pour tout*** $x \geq 0$.
    (on pouvait aussi dériver $\frac{e^{-nx}}{n}$ ***par rapport*** à n et vérifie la négativité).

  Par suite, on applique la majoration usuelle du reste d'une série alternée vérifiant le CSSA :

$$\forall\, x \geq 0,\ \left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k}\right| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|R_n(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

  On en déduit la convergence uniforme de ***la suite de fonctions*** (R_n) vers la fonction nulle soit la convergence uniforme de la ***série de fonctions*** $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3) On applique le théorème C^1 d'une série de fonctions :

- $x \to u_n(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La série $\sum u_n(x)$ converge ***simplement sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ (Q1)
- Pour tout $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, On calcule $u_n'(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$, puis immédiatement $\sup_{x\in[a,b]} \left|u_n'(x)\right| = e^{-na}$, série dont le terme général converge puisque, par exemple, série géométrique de raison $0 < e^{-a} < 1$ ***car*** $a > 0$. On en déduit la ***convergence normale donc uniforme*** sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

Par suite, La dérivation terme à terme amène :

$$\forall\, x > 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = -\frac{1}{1+e^{-x}} + 1 = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

4) La dérivée est obtenue sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais ***par continuité***, le résultat sur S restera valable en 0. :

$$\forall\, x \geq 0,\ S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t == \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \int_0^x \frac{-(e^{-t})'}{1+e^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\ln 2 + \Big[-\ln(1+e^{-t})\Big]_0^x = -\ln(1+e^{-x})$$

Cette écriture suppose connu l'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. Je rappelle l'identité usuelle du cours :

$$\forall\, x \in \left]-1,1\right[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x)$$

Cette égalité reste vraie en $x = 1$, par ***continuité*** en 1, mais ce résultat est un peu limite-cours. On peut procéder autrement et dire que les primitives de $S'(x)$ sont les $-\ln(1+e^{-x}) + cste$ et prouver que la constante est nulle par une étude de la limite en $+\infty$ mais cela nécessite d'utiliser le théorème de limite qui est licite, convergence uniforme (et même normale) montrée sur $\left[1,+\infty\right]$, donc $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n} = 0$

Mines-Telecom PSI 2021 (série de fonctions) **Détaillé**

Enoncé 108 On définit $\varphi(t) = \dfrac{1}{t(t+x)}$ avec $x > 0$ et $t \in [1, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1) Déterminez Nature et valeur de $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. *Indication : décomposer en élément simples*

2) Quel est le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$?

3) Etudiez la continuité de S.

4) Autre question ? Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$? Mathieu ne se rappelle plus

Mathieu Dore 2021

1)

- φ est continue sur $I = [1, +\infty[$ car le dénominateur ne peut s'y annuler, comme $t > 0$ et $t + x > 0$.
- $\varphi(t) \sim_{t) +\infty} \frac{1}{t^2}$ d'où l'intégrabilité par critère de Riemman, de φ sur I

Il en résulte l'existence de l'intégrale puis :

$$\int_1^{+\infty} \varphi = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1/x}{t} - \frac{1/x}{t+x}\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln t - \frac{1}{x} \ln(t+x)\right]_{t=1}^{t=A} = \frac{1}{x} \lim_{A \to +\infty} \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) + \frac{\ln(1+x)}{x} = 0 + \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Attention ! à ne pas couper l'intégrale en 2 avec $+\infty$ car les 2 divergent !

2) Notons d'abord que la fraction $f_n(x)$ est bien définie car le dénominateur ne s'annule pas car $x > 0$. La convergence (simple) de la série (de fonctions) résulte immédaitement du critère de Riemann $f_n(x) \sim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2}$ ***pour tout*** $x > 0$. D'où $\operatorname{Def} S = \mathbb{R}^{+*}$.

3) Je ne rédige que la convergence normale donc uniforme sur tout ***segment*** $\iff a, b \subset]0, +\infty[$ soit $a > 0$:

$$\sup_{x \in [a,b]} \left|f_n(x)\right| = \frac{1}{n(n+a)} \sim \frac{1}{n^2}$$

On a utilisé la décroissance de $x \to f_n(x)$ pour $x > 0$ ($x > -n$ en fait)

4) On a bien la convergence normale donc uniforme de la série des (fonctions) dérivées :

$$\sup_{x \in [a,b]} \left|f_n'(x)\right| = \sup_{x \in [a,b]} \left|\frac{-1}{n(n+x)^2}\right| \leq \frac{1}{n^3} \quad \textbf{car} \quad a \geq 0$$

En « *passant le reste du théorèmee* », on peut dériver terme à terme $S'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+x)^2}$

CCP PSI 2021 | - IMT MP 2017 (développement d'une intégrale en série) **Détaillé**

Enoncé 111 On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Prouvez l'existence de I.

2) Donnez le développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ et ramenez I à une intégrale de somme. (**MP :**Exprimez I sous forme d'une série.)

3) Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ définie sur $[0,1[$ par $f_n(x) = \frac{x^{2n-2}\ \ln x}{n}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$. Montrez cvg. normale de la série $\sum_{n\geq 2} f_n$ sur $[0,1[$.

4) Calculer $J_n = \int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$ et Montrez $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\,(2n-1)^2}$.

5) MP : Calculez I en utilisant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Adrien Michaut 2021 | RMS 132-1173 128-1280 *1+1 concours*

1) La fonction-intégrande $f(t) = \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}$ est ***continue*** sur $]0,1]$ et vérifie : $|f(t)| \sim_0 \left|\dfrac{\ln(t^2)(-t^2)}{t^2}\right| = -2\ln t$. La fonction $t \to \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ (c'est du cours ! sinon on peut appliquer le critère $t^a f(t)$ mais ***attention !*** en 0 pas en $+\infty$). Par critère d'équivalent d'une fonction positive, on en déduit f ***intégrable sur*** $]0,1]$, soit l'intégrale I ***converge absolument donc converge***.

2) Le cours nous donne $\forall\,|t|<1$, $\ln(1-t^2) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n}$, série entière de rayon de convergence $R = 1$. On a :

$$I = \int_{]0,1[} \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{-2\ln t\,\frac{t^{2n-2}}{n}}_{g_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

Attention ! Le développement en série ***n'est pas vrai*** en $t = 1$.

Remarque : Je rappelle que l'égalité $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ est en fait vraie sur $[-1,1[$ mais c'est limite-cours. On utilise la continuité en -1 pour le démontrer. Ici, cela ne sert pas...

3) f_n est dérivable sur $]0,1[$ et $f_n'(x) = \dfrac{1}{n}\big((2n-2)x^{2n-1}\ln x + x^{2n-1}\big) = \dfrac{1}{n}x^{2n-1}\big((2n-2)\ln x + 1\big)$

Je ne fais pas le tableau de variations, le max de la ***valeur absolue*** est en $a_n = \exp\left(\frac{-1}{2n-2}\right)$. Il faut bien regarder le signe de f_n et le préciser sur le tableau. Si $f_n \leq 0$, le max de la valeur absolue se trouve en fait au min... On note aussi ***qu'on a bien*** $0 < a_n < 1$ et que $n \geq 2$, sinon a_1 n'a pas de sens !

$$\left\|f_n\right\|_{\infty,\,]0,1[} = \left|f_n(a_n)\right| = \frac{1}{n}\left(\exp\left(\frac{-1}{2n-2}\right)\right)^{2n-2} \frac{1}{2n-2} = e^{-1}\,\frac{1}{n(2n-2)} \sim \frac{e^{-1}}{2n^2}$$

Par le critère de Riemann, on en déduit la ***convergence normale*** de $\sum_{n\geq 2} f_n$ sur $]0,1[$ et, ***par continuité***, sur $[0,1[$

4) Je ne vérifie pas l'existence de J_n qui se calcule avec une ipp : $u' = t^n \quad v = \ln t \quad u = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \quad v' = \dfrac{1}{t}$

$$J_n = \int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

A noter que la valeur entre crochets ***vaut bien*** 0 en 0 car $n+1>0$!

5) La convergence normale amène la convergence uniforme sur $]0,1[$ de $\sum_{n\geq 2} f_n$ et comme $g_n = -2f_n$, et on peut appliquer le 2e théorème d'intégration terme à terme. Penser à séparer le cas $n = 1$:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{]0,1[} \sum_{n=1}^{+\infty} -2\ln t \ \frac{t^{2n-2}}{n} \ \mathrm{d}t = \int_0^1 -2\ln t \,\mathrm{d}t + \int_{]0,1[} \sum_{n=2}^{+\infty} -2\ln t \ \frac{t^{2n-2}}{n} \ \mathrm{d}t \\
&= -2J_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{]0,1[} -2\ln t \ \frac{t^{2n-2}}{n} \ \mathrm{d}t = 2 + -2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \ J_{2n-2} = 2 + 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}
\end{aligned}$$

Remarque : En fait, la somme de cette série se calcule. On décompose en éléments simples, comme vous l'auriez certainement deviné : $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{4}{2n-1} + \dfrac{4}{(2n-1)^2}$

Par contre après on ne peut après pas les sommer « *froidement* » car les 2 premières sommes sont divergentes. On n'a pas non plus de télescopage ! Alors, comment faire ? Il faut utiliser la fameux développement asymptotique que vous connaissez certainement : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis :

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \frac{4}{2k-1} + \frac{4}{(2k-1)^2} = \lim\ 2H_n - 4\Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\Big) + 4\Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}\Big) \\
&= \lim\ 2\big(\ln n + \gamma + o(1)\big) - 4\Big(\ln(2n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}\big(\ln n + \gamma + o(1)\big)\Big) + 4\lim \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - 4\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \\
&= \lim\ (0\gamma + 0\ln n - 4\ln 2) \ + 4\ \frac{\pi^2}{6} - 4\frac{1}{4}\ \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{2} - 4\ln 2}
\end{aligned}$$

On a remarqué aussi que la somme des inverses des carrés ne « *contenait* » que les impairs d'où l'idée usuelle de les « *prendre tous* » et « *d'enlever* » les pairs ce qui permet d'utiliser le bien connu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

CCINP PSI 2021 (suite de fonctions) **Détaillé**

Enoncé 114 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longrightarrow \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t$ et $I_n : x \in [0,1] \longrightarrow \int_0^x g_n(t)\,dt$.

1) Montrez $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n'(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

2) Montrez $\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_n(t)-1| \leq \frac{te^t}{n}$.

3) Etudiez la convergence simple de la suite de fonctions (I_n).

4) Etudiez la convergence uniforme sur $[0,1]$.

BEOS 6183

1)

$$g_n'(t) = \left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t\right)' = e^t\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n + n\frac{-t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right) = e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}-1\right) = e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\frac{-t}{n}$$

Comme $0 \leq t \leq 1$, on en déduit immédiatement $|g_n'(t)| \leq e^t \times 1 \times \frac{1}{n}$.

2) Là, il faut penser au théorème des accroissemnts finis : si f dérivable sur $[a,b]$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a)$. Un corollaire pratique suit : si $M = \|f'(t)\|_{\infty\,[a,b]}$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$. on l'applique à g_n sur $[t,1]$, pour $0 \leq t \leq 1$, en utilisant la majoration précédente de la fonction-dérivée :

$$|g_n(t)-g_n(0)| \leq \sup_{x\in[0,t]} |g'(x)|\,|t-0| \leq \sup_{x\in[0,t]} \frac{e^x}{n} \times t = \frac{t\,e^t}{n}$$

3)

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\underbrace{\frac{t}{n}}_{\to 0}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-t+o(1)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-t}$$

Il suit que la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $e^{-t}e^t = 1 = g(t)$ sur $[0,1]$ donc sur $[0,x]$, pour $0 \leq x \leq 1$. La question Q2 amène alors la convergence uniforme sur $[0,x]$ puisque :

$$\sup_{t\in[0,x]} |g_n(t)-g(t)| \leq \sup_{t\in[0,x]} \frac{te^t}{n} \leq \frac{1\times e^1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

On termine alors par application du 2e théorème permettant la limite sous le signe somme (ce n'est pas ici le théorème de convergence dominée de Lebesgue). On doit vérifier la continuité des g_n et g dans ce théorème, ce qui est effectif. On conclut $\lim I_n = \lim \int_0^x g_n = \int_0^x 1 = x$, pour tout $0 \leq x \leq 1$.

4)

$$\left|I_n(x)-x\right| \leq \int_0^x |g_n(t)-1|\,dt \leq \frac{1}{n}\int_0^x te^t\,dt \leq \frac{1}{n}\int_0^1 1\times e^1\,dt \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Il y a bien convergence uniforme de la suite de fonctions $(I_n(x))$ vers la fonction $x \to x$ ***sur*** $[0,1]$

VII — Intégrales

CCINP PSI 2021 (intégrale à paramètre) **Détaillé**

Enoncé 118 Soit $f : x \longrightarrow \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

1) Domaine de définition de f ?

2) f est-elle continue sur D_f ?

3) Montrez $x \in D_f \Longrightarrow 1-x \in D_f$ et $f(1-x) = f(x)$.

4) Trouvez un équivalent de f en chacune des bornes de D_f.

BEOS 6063

1) On pose $g(t) = \dfrac{1}{t^x(1+t)} = \dfrac{e^{-x\ln t}}{1+t}$ qui vérifie :

- g ***continue*** sur $\left]-\infty, +\infty\right[$ et ce, ***pour tout*** x réel.
- ***Etude en*** $t=0$ $g(t) \sim_0 \dfrac{1}{t^x}$. g est donc intégrable sur $\left]0,1\right]$ ***ssi*** $x<1$ (Riemann).
- ***Etude en*** $t=+\infty$ $g(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{x+1}}$. g est donc intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ ***ssi*** $1+x>1$ (Riemann)

En conclusion g est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$ ssi $x<1$ et $x>0$. Cela amène $\boxed{\mathrm{Def}\, f = \left]0,1\right[}$

2) On applique le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre avec $f(x,t) = \frac{1}{t^x(1+t)}$ avec $I = \left[0,+\infty\right[$, $J = \left]0,1\right[$:

- $\forall x \in \left]0,1\right[$, $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left[0,+\infty\right[$
- $\forall t \in \left[0,+\infty\right[$, $x \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur $\left]0,1\right[$
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $[a,b] \subset \left]0,1\right[$ **:**

$$\forall x \in [a,b] \subset \left]0,1\right[, \ \forall t \in \left[0,+\infty\right[, \ \left|\frac{e^{-x\ln t}}{1+t}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{e^{-b\ln t}}{1+t} & \text{si } 0<t\leq 1 \\ \dfrac{e^{-a\ln t}}{1+t} & \text{si } t>1 \end{cases} = \xi(t)$$

La majoration résulte de $x \to e^{-x\ln t}$ est croissante pour $0<t<1$ et décroissante pour $t>1$ (***Attention*** au signe du ln !). ξ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur $\left[0,+\infty\right[$ car $\xi(t) \sim_0 \frac{1}{t^b}$ ***avec*** $b<1$ et $\xi(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}$ ***avec*** $a>0$, soit $a+1>1$ (Riemann)

3) Si $x \in \mathrm{Def}\, f$, $0<x<1$ donc $0<1-x<1$, soit $1-x \in \mathrm{Def}\, f$. Ensuite on effectue le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, licite car fonction C^1 et bijective de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$:

$$f(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}(1+t)} = \int_{+\infty}^0 \frac{-\mathrm{d}u/u^2}{u^{x-1}(1+1/u)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{x+1}(1+1/u)} = f(x)$$

4) Effectuons le changement de variables $u = x\ln t$, $\mathrm{d}u = x\frac{\mathrm{d}t}{t}$, $t = e^{u/x}$ dans $f(x)$, licite car C^1 et bijectif de $\left]0,+\infty\right[$ vers $\left]-\infty,+\infty\right[$ (on a utilisé $x \geq 0$) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}\,\frac{1}{x}e^{u/x}\,\mathrm{d}u}{1+e^{u/x}} = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}\,e^{u/x}}{1+e^{u/x}}\mathrm{d}u$$

Dans une première étape, admettons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}\,e^{u/x}}{1+e^{u/x}}\mathrm{d}u \xrightarrow{x\to 0} 1$. On en déduit alors $f(x) \sim_0 \dfrac{1}{x} \times 1 = \dfrac{1}{x}$.
Pour obtenir un équivalent en $x=1$, effectuons le changement de variables usuel $u = 1-x \longrightarrow 0$ et utilisons la formule de ***Q3*** et l'équivalent en 0. Il vient alors $f(u) = f(1+u) \sim \dfrac{1}{u}$. Par suite, $f(x) \sim_1 \dfrac{1}{1-x}$

Démontrons maintenant la limite. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite : soit $x_n \longrightarrow 0_+$ ***quelconque*** et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Notons que ceci amène $x_n \geq 0$. On peut même supposer, à partir d'un certain rang, $u_n \leq \frac{1}{2}$. On pose $f_n(u) = \dfrac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{1+e^{u/x_n}}$.

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $]-\infty, +\infty[$ ***:***

  - Pour $u > 0$, $e^{u/x_n} \longrightarrow +\infty$ puis $f_n(u) \sim \dfrac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{e^{u/x_n}} = e^{-u}$
  - Pour $u < 0$, $e^{u/x_n} \longrightarrow 0$ puis $f_n(u) \longrightarrow \frac{0\times e^{-u}}{1} = 0$.
  - Pour $u = 0$, $f_n(0) = \frac{1}{2}$.

  On en déduit (pour bien rédiger!) la convergence simple vers la fonction $h(u) = \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } u = 0 \end{cases}$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $]-\infty, +\infty[$ ***:***

$$\forall\, u \in\ ]-\infty, +\infty[\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(u)\right| = \left|\frac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{1+e^{u/x_n}}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{e^{u/x_n}} = e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ \dfrac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{1} = e^{u\left(\frac{1}{x_n}-1\right)} \leq e^{u(2-1)} & \text{si } u < 0 \end{cases} = \xi(u)$$

  La majoration résulte de $1 + e^{u/x_n} \geq 1$, et $\geq e^{u/x_n}$ aussi, sur tout $\mathbb{R}$ d'ailleurs!. ξ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur $]-\infty, +\infty[$ je vous laisse le vérifier

Ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u}\ e^{u/x_n}}{1+e^{u/x_n}}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$

CCINP PSI 2021 (intégrale à paramètre) **Détaillé**

Enoncé 123 Soient $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et D son domaine de définition.

1) Montrez $\left]-1,1\right[\subset D$.

2) Trouvez un développement en série entière de F.

3) Montrez F de classe C^1 sur $\left[0,1\right[$.

4) Fournir une expression simple de F' sur $\left[0,1\right[$.

5) Proposez une autre méthode pour aboutir à ce résultat.

RMS 132-1172

1) Pour $|x|<1$, on a $|xt|<|t|\leq 1$. Par suite $1=xt>0$ et le ln est bien défini. Ensuite :

- $f : t \longrightarrow \frac{\ln(1+xt)}{t}$ est bien ***continue*** sur $\left]0,1\right]$ et ce, ***pour tout*** $x\in\left]-1,1\right[$.
- $f(t)\sim_{t=0}\frac{xt}{t}=x$. f se prolonge en une fonction continue sur $\left[0,1\right]$ ***pour tout*** x.

Comme f est ***intégrable*** sur $\left]0,1\right]$, pour $-1<x<1$, on en déduit que $F(x)$ converge absolument, donc converge, cad existe (au moins) pour $x\in\left]-1,1\right[$.

2)

$$F(x)\overbrace{=}^{(1)}\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(xt)^n}{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{x^n\,t^{n-1}}{n}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t\overbrace{=}^{(2)}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1(-1)^{n+1}\frac{x^n\,t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t\;x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,x^n$$

- **(1)** On utilise le DSE usuel de $\ln(1+u)$ de rayon $R=1$: ***possible*** ici car on a bien $|u|=|xt|<1$
- **(2)** On applique le 2e théorème d'intégration terme à terme : on a bien convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ ***sur*** $\left[0,1\right]$, car normale car $\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n\,t^{n-1}}{n}\right|\leq|x|^n$, série géométrique qui converge car $|x|<1$. ***Attention!*** à bien gérer les différentes variables.

3) On utilise le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre avec $f(x,t)=\frac{\ln(1+xt)}{t}$, $I=\left]0,1\right]$, $J=\Longleftrightarrow 0,1$. $f(x,t)$ admet une dérivée partielle par rapport à x pour $(x,t)\in J\times\left]0,1\right]$, qui vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{1}{1+xt}$

- $\forall x\in J,\ t\longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur $\left]0,1\right]$ (Q1)
- $\forall x\in J,\ t\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right]$.
- $\forall t\in\left]0,1\right],\ x\longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $\left[a,b\right]\subset J$ **:**

$$\forall x\in\left[a,b\right]\subset J,\ \forall t\in\left]0,1\right],\ \left|\frac{1}{1+xt}\right|\leq\frac{1}{1+0}=\xi(t)$$

La majoration résulte de $xt\geq 0$ et ξ est continue par morceaux. ***intégrable*** sur $\left]0,1\right]$ constante sur un intervalle borné

4) La question précédente amène $F'(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+xt}=\left[\frac{1}{x}\ln(1+xt)\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{\ln(1+x)}{x}$

5) En utilisant la question Q2, $F(x)$ est une série entière de rayon $R=1$ (immédiat avec la règle de d'Alembert, je ne mets pas les détails ici). Par suite on peut dériver terme à terme sur $\left]-1,1\right[$:

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

On aura reconnu le DSE usuel de $\ln(1+x)$ avec $|x|<1$.

CCINP PSI 2021 (équation fonctionnelle intégrale) ✷ ☜ **Détaillé**

Enoncé 126 On cherche $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant la condition (E) $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Résoudre, selon la valeur du réel c, l'équation différentielle $y'' - cy = 0$

2) Soit $F : (x,y) \longrightarrow \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez F de classe C^2 et calculez $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

3) Soit f une solution de (E). Calculez $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

RMS 132-1165

1) C'est du cours. On peut d'abord rappeler que l'ensemble solution est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, sev des fonctions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Si $c > 0$, les solutions sont $y = \alpha\cosh(\sqrt{c}x) + \beta\sinh(\sqrt{c}x)$ (on peut aussi « *prendre* » $y = \lambda e^{\sqrt{c}x} + \mu e^{-\sqrt{c}x}$).
- Si $c = 0$, les solutions sont $y = ax + b$.
- Si $c < 0$, les solutions sont $y = \alpha\cos(\sqrt{-c}x) + \beta\sin(\sqrt{-c}x)$

2) ***Attention!*** c'est une fonction à deux variables. Il va falloir utiliser le théorème dit « *intégrale de la borne sup* » du cours de Sup. ***mais pas*** le théorème d'une intégrale à paramètre du cours de spé. Je le rappelle : si f est continue sur I, et $a \in I$, alors la fonction $F : x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Plus précisément, F est définie, continue, C^1 sur I et $F'(x) = f(x)$. Si f est C^k, F est C^{k+1}. Je rappelle ausii, car cela va faire servir, une sorte de corollaire, si $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, via Chasles et l'écriture $G(x) = F(a(x)) - F(b(x))$ (je vous laisse y réfléchir), G est C^1 et $G'(x) = a'(x)F'(a(x)) - b'(x)F'(b(x)) = a'(x)f(a(x)) - b'(x)f(b(x))$?

On va aussi utiliser les théorèmes des fonctions multi-variables. Pour montrer C^1, il faut établir que les 2 dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues et pour C^2, on répète avec les 2 dérivées partielles de ces 2 fonctions, soient 4 en tout. Se servir des symétries éventuelles pour aller plus vite. Bien sûr, on peut aussi utiliser les résultats : produit, somme, composée de fonctions usuelles ***mais*** il faut être précis car il y a 2 variables et les fonctions usuelles sont toutes à 1 variable.

A y ***fixé***, avec $a(x) = x - y$ et $b(x) = x + y$, de dérivées $a'(x) = b'(x) = 1$, comme la fonction-intégrande f est continue, le théorème cité plus haut s'applique et donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 1 \times f(x+y) - 1 \times f(x-y) = f(x+y) - f(x-y)$. Un raisonnement analogue donne $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f(x+y) + f(x-y)$ (je vous laisse y réfléchir).

Les fonctions $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont clairement C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc F est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (***Attention!*** à bien dire $\mathbb{R}^2$ et pas $\mathbb{R}$). Je vous détaille le premier f est C^1 (on le prouve après) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on le compose avec $(x,y) \longrightarrow x + y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donc $(x,y) \longrightarrow f(x+y)$ est bien C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Idem pour $f(x-y)$.

La condition (E) à y ***fixé***, on prend $y = 1$ par exemple (il ne faut pas prendre $y = 0$ je vous laisse réfléchir pourquoi), amène $f(x)f(1) = \int_{x-1}^{x+1} f$ puis via toujours le même théorème rappelé plus haut, f C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)f(1) = f(x+1) - f(x-1)$. On peut noter qu'une récurrence immédiate entraînera même f C^∞. Pour synthétiser, toute fonction ***continue*** vérifiant (E) sera nécessairement C^∞.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x+y) - f(x-y)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x+y) + f(x-y)\Big]$$

$$\overbrace{=}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x+y)\Big] - \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x-y)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x+y)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x-y)\Big]$$

$$\overbrace{=}^{(2)} f1 \times f'(x+y) - 1 \times f'(x-y) - 1 \times f'(x+y) - (-1) \times f'(x-y) = 0$$

- **(1)** De même qu'il ya linéarité de la dérivation, il y a linéarité des dérivées partielles (cours)

- **(2)** Je rappelle (l'une) des règles de la chaine : par exemple si $f(t) = g(a(t), b(t))$, alors

$$f'(t) = a'(t)\frac{\partial g}{\partial x}(a(t), b(t)) + b'(t)\frac{\partial g}{\partial y}(a(t), b(t))$$

3) $x = y = 0$ amène $f(0)^2 = 0$ soit $f(0) = 0$. On calcule :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big[f(x)f(y)\Big] - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big[f(x)f(y)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f'(x)f(y)\Big] - \frac{\partial}{\partial y}\Big[f(x)f'(yu)\Big] = f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$$

Donc si f vérifie (E), en utilisant la question précédente, on obtient $f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = 0$. Si on fixe y, on obtient une équation comme en ***Q1***. Si f est l'application nulle, évidemment elle vérifie (E). Sinon, il existe un y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. On obtient alors que f est solution de l'équation différentielle $y'' - cy$ avec $c = \frac{f''(y_0)}{f(y_0)}$. Comme on ne peut rien dire du signe de c, on prend les 3 types de solutions et on regarde la réciproque en « *injectant* » $f(0) = 0$.

- $f(x) = \alpha\cosh(bx) + \beta\sinh(bx)$ et $f(0) = 0$ amènent $\alpha = 0$ puis, à l'aide de formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \beta^2\sinh(bx)\sinh(by) \\ \int_{x-y}^{x+y}\beta\sinh(bt)\,\mathrm{d}t &= \beta\Big[\frac{1}{b}\cosh(bt)\Big]_{x-y}^{x+y} = \frac{\beta}{b}\big(\cosh(b(x+y)) - \cosh(b(x-y))\big) \\ &= \frac{\beta}{b}\big(\cosh(bx)\cosh(by) + \sinh(bx)\sinh(by) - \cosh(bx)\cosh(by) + \sinh(bx)\sinh(by)\big) \\ &= \frac{2\beta}{b}\sinh(bx)\sinh(by) \end{aligned}$$

  Donc f vérifie (E) ssi $\beta^2 = \frac{2\beta}{b}$ ssi $\beta = 0$ ou $b = \frac{2}{\beta}$. Dans ce cas, les solutions sont alors $\boxed{f(x) = \beta\sinh\big(\frac{2}{\beta}x\big)}$

- $f(x) = \alpha\cos(bx) + \beta\sin(bx)$ et $f(0) = 0$ amènent $\alpha = 0$ puis un calcul identique $\boxed{f(x) = \beta\sin\big(\frac{2}{\beta}x\big)}$
- $f(x) = ax + b$ et $f(0) = 0$ amènent $b = 0$ puis $f(x)f(y) = a^2xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} at\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big) = 2axy$. f solution de (E) ssi $a^2 = 2a$ ssi $a = 0$ ou $a = 2$. $\boxed{f(x) = 2x}$

CCINP PSI 2022-2021 (fonction-intégrale de la borne sup) **Détaillé**

Enoncé 128 On pose $F(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Donnez le domaine de définition de F.

2) Montrez, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3) Montrez, pour tout $x \in]0,1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$

Indication : on pourra procéder à une intégration par parties et utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Laurine Pierre 2022 | Nicolas Blandin 2021 | RMS 132-1169 *1+1 concours*

1) ***Attention!*** à bien raisonner avec le rôle de x. La fonction $f(t) = \frac{\ln(1-t)}{t}$ n'existe que pour $1-t>0$ et $t \neq 0$, soit $t \in]-\infty, 0[\cup]0,1[$.

Méthode 1 : D'après le cours, l'existence de l'intégrale ***nécessite au moins*** que l'intervalle $]0,x[$ vérifie $]0,x[\subset]-\infty,0[\cup]0,1[$. Je vous laisse réfléchir au fait que ceci ***impose*** $x \in]-\infty,0[\cup]0,1[= D$. Montrons F définie sur D :

- f est continue sur $]0,x[$, d'après la remarque antérieure
- ***Etude en $t=0$:*** $f(t) \sim_0 \frac{-t}{t} = -1$, f se prolonge en une fonction continue en 0, pour tout $x \in D$.
- ***Etude en $t = x$:*** La fonction f est continue en x si $x \neq 1$, par conséquent on étudie que le cas $x = 1$, soit l'étude en $t = 1$. Le changement de variables $u = 1-t$ amène $f^*(u) = \frac{\ln u}{1-u} \sim_{u=0} \ln u$ intégrable en 0, c'est du cours!

Méthode 2 : On peut s'y prendre un peu mieux : comme $f(t) \sim_0 -1$, f peut se prolonger en une fonction continue sur $J =]-\infty,1[$ que l'on notera $\widehat{f}$ pour ne pas « *tricher* » avec les raisonnements. On sait alors, théorème de Sup, que $G : x \to \int_0^x \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et même continue, dérivable, C^1 sur I, c'est la primitive de $\widehat{f}$ qui s'annule en 0. Or comme $\widehat{f}$ et f sont continues par morceaux et ne diffèrent que d'un point, on sait $F(x) = G(x)$

Remarque : On s'aperçoit que la 2e méthode ne donne pas tout à fait le même domaine : il y a 0 en plus ...En fait dans la première méthode on peut montrer que F se prolonge par continuité en 0. Et d'ailleurs aussi en 1, puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge. Bref, on pourrait dire $\operatorname{Def} F =]-\infty, 1]$. Tout ceci est complexe.

2) Par la deuxième méthode F est dérivable sur J est $F'(x) = -\frac{\ln(1-x}{x}$. Cette fonction admet un DSE usuel sur $]-1,1[$ qui est $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$. Par théorème de cours F admet alors le DSE sur $]-1,1[$ (donc sur $[0,1[$) qui est obtenu « *par primitivation* » en n'oubliant pas la valeur en 0 qui est $F(0) = 0$, soit $\forall x \in [0,1[$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$
Reste la valeur en 1, une « *histoire* » de continuité, je vous rappelle, mais je ne mets pas les détails : on passe à la limite lorsque $x \longrightarrow 1$, la série entière est continue en 1, puisqu'il y a convergence normale sur $[0,1]$: $\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Quant à la fonction F, elle n'est pas définie en 1, il faut la prolonger par continuité ce qui est possible puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge, déjà dit dans la remarque. Ouf!

3) Il faut penser à dériver! Je ne mets pas les détails : la 2e dérivée vaut $-\frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln x$. Quant au premier membre, on applique le théorème plus haut : $F'(x) = -f(x) = -\frac{\ln(1-x}{x}$ et, par dérivée composée, $\big(F(1-x)\big)' = -F'(1-x) = -\Big(-\frac{\ln(1-(1-x)}{1-x}\Big)$. On retrouve la même valeur. Comme $]0,1[$ est ***un intervalle***, les deux fonctions diffèrent à une constante près : On prend la valeur en 0 (ou la limite par continuité) : $\ln(1-x)\ln(x) \sim_0 -x\ln(x) \longrightarrow 0$ et $\big(F(x)+F(1-x)\big)(0) = F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

CCP PSI 2021-2019 | CCP PC 2017(calcul intégrale de Dirichlet) **Livre** **Laplace** **Détaillé**

Enoncé 131

Pour $(x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}$, on pose $g(x,t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ et $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1) PC : Déterminez la limite de $g(x,t)$ lorsque $t\longrightarrow 0$.

2) Montrez que $f(x)$ existe pour $x\geq 0$.

3) Montrez f continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Montrez f de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. (**PC :** de classe C^1)

5) Déterminez les limites de f et f' en $+\infty$. (**PC :** Question absente) .

6) Montrez $f'(x)=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$. (**PSI 2019,PC :** calculez $f'(x)$ et $f(x)$) .(**PC :**En déduire $f(x)$)

7) Exprimez I en fonction de $f(0)$ et en déduire sa valeur. (**PSI 2019 :** Justifiez l'existence et calculez I)

Emy Courtois 2021 | RMS 130-1262 128-1159 *1+2 concours*

2) On a les propriétés suivantes :

- $g:t\to\dfrac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}$ est ***continue*** sur $]0,+\infty[$, et ce ***pour tout*** $x\geq 0$.
- ***Etude en*** $t=0$ **:**
  $g(t)\sim_{t=0}\dfrac{1/2\;t^2}{t^2}e^0=\dfrac{1}{2}$ se prolonge donc en une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ***pour tout*** $x\geq 0$ d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$
- ***Etude en*** $t=+\infty$
  $0\leq\left|g(t)\right|\leq\dfrac{2}{t^2}\times 1$ ***car*** $xt\geq 0$. Par critère de comparaison d'une fonction positive, on en déduit l'intégrabilité de g sur $[1,+\infty[$ ***pour tout*** $x\geq 0$.

L'intégrabilité de g sur $]0,+\infty[$ amène l'intégrale $f(x)=\int_0^{+\infty} g$ converge absolument donc converge pour $x\geq 0$.

Remarque : Je vous rappelle que démontrer que (une fonction f quelle qu'elle soit) ***existe pour*** $x\geq 0$ ce n'est pas la même chose que démontrer $\operatorname{Def} f=\mathbb{R}^+$. Il n'y a qu'une inclusion (je vous laisse réfléchir laquelle)

3) On pose $f(x,t)=\frac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}$ La continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ résulte de l'application du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

- $\forall\, x\in\mathbb{R}^+$, $t\longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
- $\forall\, t\in\,]0,+\infty[$, $x\longrightarrow f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$ **:**
  $$\forall\, x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^+,\ \forall\, t\in\,]0,+\infty[,\ \left|\frac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}\right|\leq\frac{1-\cos t}{t^2}=\xi(t)$$
  La majoration résulte de $xt\geq 0$. ξ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur $]0,+\infty[$ pour des raisons analogues à Q1

4) On applique le théorème de C^2 pour une intégrale à paramètre sur $K=\mathbb{R}^{+*}$. Les dérivées partielles premières et secondes de $f(x,t)$ par rapport à x existent bien pour $(t,x)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]0,+\infty[$ et :

$$\forall\,(x,t)\in K\times\,]0,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{\cos t-1}{t}e^{-xt}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=(1-\cos t)e^{-xt}$$

- $\forall\, x\in K$, $t\to f(x,t)$ c/m et ***intégrable*** (Q1) sur $]0,+\infty[$.
- $\forall\, x\in K$, $t\to\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- $\forall\, t\in\,]0,+\infty[$, $x\to\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ continue sur K.
- $\forall\, x\in K$, $t\to\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- $\forall\, t\in\,]0,+\infty[$, $x\to\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ continue sur K.
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $[a,b]\subset\,]0,+\infty[$

Ici, ***contrairement*** à Q2, $a>0$.

$$\forall\, t>0, \forall\, x\in\left[\,a,b\,\right],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{2}{t}e^{-at}=\psi(t)\qquad\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq 2\ e^{-at}=\xi(t)$$

On a utilisé la ***décroissance*** de $x\to e^{-xt}$ ***car*** $t\geq 0$. ψ et ξ sont bien ***intégrables*** sur $\left]0,+\infty\right[$ par prolongement par continuité en 0 et critère $t^2 f(t)$ en $+\infty$ qui est ok ***car*** $a>0$, le ***strict*** est essentiel ici (je ne mets pas les détails ici)

$$\text{On a donc }\ \forall\, x>0,\ \ f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t-1}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t\qquad f''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

5) Il n'est pas utile ici d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite associée au théorème de convergence dominée de Lebesgue, car une simple majoration suffit :

$$0\leq\left|f(x)\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}\right|\mathrm{d}t\leq N\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=N\,\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}0$$
$$0\leq\left|f'(x)\right|\leq\int_0^{+\infty}\left|\frac{\cos t-1}{t}e^{-xt}\right|\mathrm{d}t\leq M\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t=M\,\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}0$$

On a utilisé que $\frac{1-\cos t}{t^2}$ (rp. $\frac{1-\cos t}{t}$) sont ***continues*** sur $\left[0,+\infty\right[$ (par prolongement en 0, vu plus haut) et ont ***pour limite 0*** en $+\infty$ (par majoration élémentaire). Un résultat, pas stricto-sensu du cours, mais fait plusieurs fois en cours, déjà rédigé, fait en sup, je ne le refais donc pas ici, donne que ces fonctions sont bornées sur $\left[0,+\infty\right[$ (le N et le M). Allez le revoir, il utilise les ε.

6)

$$\forall\, x>0,\ f''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\Re\left(e^{(i-x)t}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{x}-\Re\left(\int_0^{+\infty}e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{x}-\Re\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=+\infty}\right)\overbrace{=}^{(1)}\frac{1}{x}+\Re\left(\frac{1}{i-x}\right)=\frac{1}{x}+\Re\left(\frac{-i-x}{1+x^2}\right)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

Il faut justifier proprement la limite complexe, en se rappelant qu'une limite est nulle ssi celle du module est nulle. Or $\left|e^{(i-x)t}\right|=e^{-xt}\xrightarrow{t\to+\infty}0$ ***car*** x ***est strictement positif***

On termine en primitivant et en remarquant que $\left]0,+\infty\right[$ est un ***intervalle*** (donc une ***seule*** constante : $\forall\, x>0,\ f'(x)=C+\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. On utilise $\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\xrightarrow{x\to+\infty}\ln 1=0$ et le résultat de Q4 pour arriver à $C=0$

7) Il faut effectuer une dernière primitivation avec une ipp : $u'=1$ $v=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ $u=x$ $v'=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$:

$$\int\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x=x\big(\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\big)-\int x\Big(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\Big)=x\ln x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\arctan x+C$$

On trouve la constante par la limite nulle en $+\infty$, mais attention, $\lim_{+\infty}x\ln x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ et par suite $C=\frac{\pi}{2}$. Finalement :

$$\forall\, x>0,\ f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)-\arctan x+\frac{\pi}{2}$$

8) $I=f(0)$ et la ***continuité*** en 0 de f (Q2) permet le passage à la limite dans la formule plus haut (à priori vraie pour >0). On a clairement la limite en 0 égale à $\frac{\pi}{2}$ qui est donc la valeur de I. On aura reconnu l'intégrale de Dirichlet

CCP PSI 2021 (équivalent suite-intégrale) **Détaillé**

Enoncé 134 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,dx$.

1) Montrez l'existence de I_n.

2) Montrez $I_n = \dfrac{1}{n^{5/3}} J_n$ avec $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\,dt$.

3) Montrez $\lim J_n = K$ avec $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt$

4) A l'aide d'un changement de variables, montrez $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,dt$

5) Prouvez $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,dt$ et en déduire $I_n \sim \frac{2\pi\sqrt{3}}{9n^{5/3}}$.

Camille Havard 2021

1)

- $f_n : x \to \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}$ continue sur $[0,+\infty[$ et ce ***pour tout*** $n \in \mathbb{N}$
- $0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^4x^3} \sim_{x=+\infty} \frac{1}{n^4x^3}$ ***Attention!*** pour $n \neq 0$.
  Du critère de majoration et d'équivalent d'une fonction positive à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ $(3>1)$, il en résulte f_n intégrable sur $[0,+\infty[$.

Il en résulte l'existence de I_n pour $n \geq 1$. I_0 existe par nullité de l'intégrande.

2) Le changement de variables $u = n^{4/3}x$ $du = n^{4/3}dx$ de classe C^1 bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ amène :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{u}{n^{4/3}}\right)}{1+u^3}\,\frac{du}{n^{4/3}} = \frac{1}{n^{5/3}}\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{n^{1/3}\,\sin\left(\frac{u}{n^{1/3}}\right)}{1+u^3}}_{g_n(u)}\,du = \frac{1}{n^{5/3}} J_n$$

3)

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** g_n ***sur*** $]0,+\infty[$
  On écrit $g_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{\frac{t}{n^{1/3}}}\,\dfrac{t}{1+t^3} \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{t}{1+t^3}$ pour tout $t>0$, car $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$
- ***Hypothèse de Domination :***

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t > 0,\ \left|g_n(t)\right| = \left|\frac{n^{1/3}\,\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}\right| \leq \frac{n^{1/3}\,\left|\frac{t}{n^{1/3}}\right|}{1+t^3} \leq \frac{t}{1+t^3} = \varphi(t)$$

On a appliqué l'inégalité de convexité usuelle $|\sin u| \leq |u|$. On a clairement φ ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$! (laissé au lecteur)

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique $\lim J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt = K$

4) C'est le changement $u = \dfrac{1}{t}$ C^1 bijectif de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Je ne mets pas les détails ici.

5) Egalité intégrale immédiate avec Q3 et Q4 :

$$2K = K + K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,dt + \frac{1}{1+t^3}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,dt$$

Comme $\lim J_n = K \neq 0$, on déduit $J_n \sim K$ et de Q2 :

$$I_n = \frac{1}{n^{5/3}} J_n \sim \frac{1}{n^{5/3}} K = \frac{1}{2n^{5/3}} \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{2n^{5/3}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$\text{et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{2\pi}{3}$$

CCP PSI 2021 - CCP MPBQ 2021(fonction Γ) **Détaillé**

Enoncé 136 On définit $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Donnez domaine de définition de Γ.

2) Trouvez une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$.

3) Calculez $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

4) Montrez Gamma continue puis dérivable sur son domaine de définition. Précisez $\Gamma'(x)$.

5) Antoine n'est plus très sûr : Donnez la valeur pour laquelle Γ' s'annule. Calculez $\Gamma''(x)$. Donnez les limites de Γ aux bornes du domaine de définition. (**BQMP :** Question absente) .

Antoine Michon 2021 BQMP 2021-029

1) On a :

- $t\longrightarrow t^{x-1}e^{-t}$ continue sur $\left]0,+\infty\right[$ et ce ***pour tout*** x réel. (***Attention!*** pour x ***non entier***, $t^{x-1}=e^{(x-1)\ln t}$)
- $t^{x-1}e^{-t}\sim_{t=0} t^{x-1}\times 1=\dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui par le critère de Riemann et d'équivalent pour une fonction positive (localement) amène l'intégrabilité sur $\left]0,1\right]$ ***si et seulement si*** $1-x<1 \iff x>0$.
  (On ***peut donc*** dans la suite ne considérer que $x>0$, si besoin est)
- Le critère $t^a f(t)$ amène $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t}=0$ par croissance s comparées, d'où l'intégrabilité sur $\left[1,+\infty\right[$ et ce ***pour tout*** x réel.

Conclusion : $\mathrm{Def}\,\Gamma=\mathbb{R}^{+*}$

2) Une ipp avec $u=t^x \quad v'=e^{-t} \quad u'=xt^{x-1} \quad v=-e^{-t}$ amène :

$$\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-t^x e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=+\infty}+\int_0^{+\infty} x t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=x\Gamma(x) \qquad (0^x=e^{-\infty}=0 \textbf{ car } x>0)$$

Une ipp ***directement*** en $+\infty$ est ***licite*** ici puisqu'on reconnaît dans le second membre une intégrale convergente puisque c'est la fonction Γ.

Une récurrence immédiate, que je ne fais pas ici, amène pour n ***entier***, $\Gamma(n)=(n-1)!$
(le « *décalage* » de -1 provient du $x-1$ de $t^{x-1}\ldots$).

3)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}2u\,\mathrm{d}u=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$$

On a effectué le changement de variables $u=\sqrt{t}$ de classe C^1 de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$. On a $t=u^2$ et $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$. On a reconnu l'intégrale de Gauss. Peut-être l'examinateur voulait savoir si vous le saviez ou peut-être l'a t'il donné en indication. Antoine ne me l'a pas précisé.

4) Je fais juste la domination dans les 2 cas. Je ne vous conseille pas néanmoins de procéder comme cela ou alors demandez la permission à l'examinateur avant.

$$\forall x\in[a,b]\subset\left]0,+\infty\right[\ \forall t>0,\ \left|t^{x-1}e^{-t}\right|\leq\begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t\geq 1\\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0<t<1\end{cases}=\varphi(t)$$

On a utilisé la ***croissance / décroissance*** de $x\longrightarrow e^{(x-1)\ln t}$ selon $t><1$ car $\ln t><0$. φ est intégrable en 0 comme en $+\infty$ car on reconnaît $\Gamma(a)$ et $\Gamma(b)$ ***avec*** $a,b>0$.

$$\forall x\in[a,b]\subset\left]0,+\infty\right[\ \forall t>0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|\ln t|\,t^{x-1}e^{-t}\leq\begin{cases}|\ln t|\,t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t\geq 1\\ |\ln t|\,t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0<t<1\end{cases}=\varphi(t)$$

Il faut ici reprouver l'intégrabilité en $+\infty$ par le critère $\lim_{+\infty} t^2\ |\ln t| t^{b-1} e^{-t} = 0$. En 0 aussi, car $|\ln t| t^{a-1} e^{-t} \sim_0 -t^{a-1} \ln t$. On prend $\lim_0 t^\lambda\ t^{a-1} \ln t = 0$. Une ***analyse*** montre qu'on doit prendre $1 - a < \lambda < 1$, soit, par exemple, la demie-somme $\lambda = \frac{1}{2}(2-a)$

$\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln t\, t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$

5) Par une domination analogue, on démontre $(\Gamma')'(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2 t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On en déduit $\Gamma')' > 0$, soit Γ' strictement croissante (et Γ convexe). Γ' s'annule au plus une fois. Reste à utiliser le théorème de Rolle : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ et donc s'annule (au moins une fois) entre 1 et 2.

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$: on passe à la limite lorsque $x \to 0$ en utilisant ***la continuité*** en 1, qui amène $\lim_0 x\Gamma(x) = 1$, soit $\Gamma(x) \sim_0 \frac{1}{x}$, donc $\lim_{0_+} \Gamma = +\infty$

En suite en utilisant la partie entière et la croissance $\Gamma(x) \geq \Gamma(E(x)) = (E(x)-1)!$ donc $\lim_{+\infty} \Gamma = +\infty$.

VIII — Espaces Vectoriels normés

CCINP PSI 2021 (normes équivalentes sur espaces de fonctions) **Détaillé**

Enoncé 142

On note $E = \{f \in \mathscr{C}^1\left[0,1\right],\ f(0)=0\}$. On pose, pour toute fonction $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$.

1) Montrez N et N' sont des normes sur E.

2) Etablir, pour tout $x \in [0,1]$, $e^x f(x) = \int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,\mathrm{d}t$.

3) Montrez il existe deux réels α, β tq $\forall f \in E$, $\alpha N'(f) \le N(f) \le \beta N'(f)$.

RMS 132-1155

1) On applique les propriétés connues de norme de $\|.\|_\infty$ sur les fonctions continues : à noter que f et f' sont bien continues par l'hypothèse C^1 de l'énoncé. N est une norme car c'est clairement une application dans $\mathbb{R}^+$ et elle vérifie les 3 propriétés :

- Pour $f, g \in E$, $N(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g)$
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E$, $N(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda| N(f)$
- Supposons $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$. On en déduit $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty = 0$ puis $f = f' = 0$ sur $\left[0,1\right]$, en particulier on a bien f identiquement nulle.

Pour N', je ne démontre que la 3$^{\text{e}}$ propriété, dite de « *séparation* ». Si $N'(f) = 0$, alors $f + f' = 0$ sur $\left[0,1\right]$. L'équation différentielle s'intègre immédiatement en $f(x) = Ce^{-x}$. On se sert alors de l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$ qui amène $C = 0$.

2)

$$\forall x \in \left[0,1\right],\ \int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(e^t f(t)\big)'\,\mathrm{d}t = e^x f(x) - e^0 f(0) = e^x f(x)$$

3) On a immédiatement $N'(f) = \|f+f'\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N(f)$. Pour l'autre inégalité, on utilise **Q2** :

$$\begin{aligned}\left|e^x f(x)\right| &= \left|\int_0^x e^t\big(f(t)+f'(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^x e^t\left|f(t)+f'(t)\right|\,\mathrm{d}t \le \int_0^x e^t\|f+f'\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &= \|f+f'\|_\infty \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = \|f+f'\|_\infty\ (e^x-1) \le (e-1)\ N'(f)\end{aligned}$$

Comme, pour $x \in \left[0,1\right]$, $|f(x)| \le |e^x f(x)|$, il suit $\|f\|_\infty \le (e-1)N'(f)$. Ensuite on écrit :

$$\|f'\|_\infty = \|f'+f-f\|_\infty \le \|f+f'\|_\infty + \|f\|_\infty \le N'(f) + (e-1)N'(f) = e\ N'(f)$$

On termine, en ajoutant les 2 dernières inégalités : $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le (e-1)N'(f) + eN'(f) = (2e-1)N'(f)$

CCP PSI 2021 (limite suite endomorphismes) **Détaillé**

Enoncé 146

Soit E un evn de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $\forall\, x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|x\|$.

1) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - Id) \cap \operatorname{Im}(f - Id)$ et y tel que $x = f(y) - y$. Déterminez $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.

2) En déduire $E = \operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id)$

3) Emy ne s'en rappelle plus. Il y a un résultat qui demande alors de démontrer que la suite de vecteurs $\frac{1}{n}\big(x + f(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\big)$ a pour limite, lorsque $n \to +\infty$, la projection de x sur $\operatorname{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - Id)$. C'est peut-être cela ??

Emy Courtois 2021

1) Puisque $x \in \operatorname{Im}(f - Id)$, alors $x = f(y) - y$. D'autre part $x \in \operatorname{Ker}(f - Id)$, soit $f(x) = x$. Ceci amène $f^2(y) = f(f(y)) = f(x+y) = f(x) + f(y) = 2x + y$ puis $f^3(y) = f(2x+y) = 2f(x) + f(y) = 3x + y$. On conjecture $f^n(y) = nx + y$ que l'on démontre par récurrence. Je vous laisse le traiter.

2) De la question précédente, on tire $x = \frac{1}{n}\big(f^n(y) - y\big)$. On va faire alors des limites. Je rappelle que les limites (dans les evs) n'existent que dans les evns (n comme normé) et qu'elles ne peuvent se prouver proprement que par l'utilisation des normes justement. Je rappelle entre autres, que $u_n \to 0$ ssi $\|u_n\| \to 0$.

L'hypothèse $\|f(y)\| \leq \|y\|$ amène par récurrence immédiate $\|f^n(y)\| \leq \|y\|$. Par suite :

$$0 \leq \|x\| = \left\| \frac{1}{n}\big(f^n(y) - y\big) \right\| \leq \frac{1}{n}\, 2\|y\| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Il vient $x = 0$, soit $\operatorname{Ker}(f - Id) \cap \operatorname{Im}(f - Id) \subset \{0\}$ d'où l'égalité, l'autre inclusion étant immédiate. Le théorème du rang, appliqué à $f - Id$ donne alors l'assertion de l'énoncé : $E = \operatorname{Ker}(f - Id) \oplus \operatorname{Im}(f - Id)$

3)

IX — Analyse : Autres

CCINP PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2)

Enoncé 154 On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2-1)y''+2xy'-2y=0$.

1) Déterminez les solutions polynomiales de (E).

2) Trouvez une équation différentielle (E') vérifiée par $x \longrightarrow z(x) = \frac{1}{x}y(x)$.

3) Cherchez a, b, c tq $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

4) Résoudre (E'). En déduire toutes les solutions de (E).

RMS 132-1175

1) Je rappelle qu'il faut prêter immédiatement attention si le « *coefficient dominant* » s'annule, ici x^2-1, cela pourrait mettre en défaut les théorèmes. On se ***place donc ic***i sur un des intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$.

Une méthode pourrait être de chercher d'abord toutes les séries entières $\sum a_n x^n$ solutions puis de déterminer celles telles que a_n est nul à partir d'un certain rang, mais c'est en général peu efficace. Procédons comme suit : cherchons d'abord les degrés (éventuels) des polynômes solutions en raisonnant sur le terme de plus haut degré du polynôme solution : $a_n x^n$ (donc $a_n \neq 0$).

- Le terme de plus haut degré de $(X^2-1)P''(X)$ est $n(n-1)a_n X^n$.
- Le terme de plus haut degré de $2XP'(X)$ est $2na_n X^n$.
- Le terme de plus haut degré de $-2P(X)$ est $-2a_n X^n$

Par conséquent, on a $n(n-1)a_nX^n + 2a_nX^n - 2a_nX^n = (n^2+n-2)a_nX^n = 0$. Ceci amène $n=1$. On cherche alors les polynômes solutions sous la forme $aX+b$ et on arrive (je ne mets pas les détails ici) à aX.

2) Je rappelle la méthode de Lagrange, qui est que lorsque l'on connaît une solution f de ***l'équation homogène*** d'une équation différentielle linéaire du 2ᵉ ordre (comme ici), alors on effectue le changement de variable $y = fz$ dans l'équation complète ***avec second membre***. Ceci aboutira à une équation incomplète du 2ᵉ ordre, un 1ᵉʳ ordre en z', qui elle, est « *résolvable* » par double intégration. Cette méthode n'est pas stricto-sensu au programme ; il est néanmoins mieux, pour un élève ambitieux, de la connaître. A noter que l'énoncé, ici, vous la donne, cad donne le changement de variables, mais à l'envers. . . .

$$\begin{aligned} y &= xz && \times(-2) \\ y' &= xz'+z && \times 2x \\ y'' &= xz''+2xz' && \times(x^2-1) \end{aligned}$$

On note que ce changement de fonction inconnue nécessite, pour un raisonnement propre, « *d'enlever* » 0. On se place donc sur l'un des 4 intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,0[$ ***ou*** $]0,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$. y est donc solution de (E) ***sur un de ces intervalles*** ssi z y est solution de :

$$(x^2-1)(xz''+2xz')+2x(xz'+z)-2xz=0 \iff x(x^2-1)\left(z'\right)' + \ (4x^2-2)\ z' = 0 \quad (E')$$

3) $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{-1}{x+1}$

4) Une première intégration ((E') équation différentielle linéaire du 1[er] ordre en z') en :

$$\begin{aligned} z' &= C\ \exp\left(\int \frac{2-4x^2}{x(x^2-1)}\,\mathrm{d}x\right) = C\ \exp\left(\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\ \right)\\ &= C\ \exp\Big(-2\ln|x|-\ln|x-1|-\ln|x+1|\Big) = C\ \frac{1}{x^2\,\left|x^2-1\right|}\end{aligned}$$

Justifions proprement que l'on peut « *enlever* » la valeur absolue : sur chacun des 4 intervalles (d'où leur importance ici aussi) le signe de x^2-1 est constant. On a donc $C\times$ un signe constant qui est une constante quelconque. On l'appellera C aussi par commodité. Pour une 2[e] intégration, on re-décompose en éléments simples, ici c'est un peu plus dur (racine multiple) je mets un peu plus de détails :

$$\frac{1}{x^2\ (x^2-1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$$

en $\times x^2$ puis valeur en $x=0$, on trouve $b=-1$. Méthode usuelle identique pour $(x-1)$ et $(x+1)$, on arrive à $c=\frac{1}{2}$ et $d=-\frac{1}{2}$. Pour trouver la dernière valeur, on pourrait prendre une valeur, $x=2$ étant le plus simple mais on va utiliser la méthode efficace : on $\times x$ et on prend la limite en $+\infty$: $0=a+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$, soit $a=0$.

$$z' = C\left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}\right) \quad\Longrightarrow\quad z = C\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\ +\ D$$

Ne pas oublier de mettre des valeurs absolues lorsque l'on primitive en ln.

Finalement $\boxed{y = C\left(1+\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\ +\ Dx}$

Attention! que ces solutions ne sont valides, à priori, que sur l'un des 4 intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,0[$ ***ou*** $]0,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$ (ou les sous-intervalles). On retrouve bien une structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

CCINP PSI 2021 (trigonalisation et système différentiel) **Détaillé**

Enoncé 165 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrez A non diagonalisable.

2) Montrez il existe une base (e_1, e_2) qui trigonalise A. Donnez T.

3) Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= -x+4y \\ y' &= -x+3y \end{cases}$

4) Comment faire pour trouver les constantes sachant $x(0) = y(0) = 1$.

Romain Desloges 2021

1) On calcule immédiatement $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = (\lambda - 1)^2$. Il y a alors 2 méthodes :
Méthode 1 : On a $I - A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$; il suit $\operatorname{rg}(I - A) = 1$ $(c_2 = -2C - 1)$ d'où $\dim E(1) = \operatorname{Ker}(I - A) = 2 - 1 \neq \mu(1) = 2$, donc A est non diagonalisable.
Méthode 2 : Comme A n'a qu'une seule valeur propre 1, elle n'est diagonalisable que ssi c'est $A = 1I$ ce qui n'est visiblement pas le cas. C'est limite-cours mais je vous ai fait la démonstration plusieurs fois.

2) Lorsqu'il y a un « *défaut de 1 vecteur propre* », ou plus précisément, la somme des dimensions des espaces propres est égale à $n - 1$, il est très facile de trigonaliser : on construit une famille libre de $n - 1$ vecteurs propres et on la complète par n'importe quel vecteur (qui n'est pas lié tout au moins). La matrice dans cette base sera alors triangulaire. C'est le cas ici. Prêter attention au fait que dans certains énoncés on vous donne explicitement la matrice T à construire : c'est un peu plus compliqué, il faut faire une analyse pour déterminer la base.
La Q1 a remarqué $C_2 = -2C_1$ pour $I - A$ ce qui vous donne, sans calcul, un vecteur du noyau $\operatorname{Ker}(I - A) = E(1)$, soit $e_1 = (2, 1)$. Expliqué plusieurs fois en cours,je ne le refais pas ici. Sinon, vous résolvez le système 2×2. On complète par un vecteur quelconque, le plus simple possible, mais non lié : on va prendre $e_2 = (1, 0)$. Reste à calculer les coordonnées de Ae_2 ***dans cette base*** (e_1, e_2). On a $Ae_2 = C_1(A) = (-1, -1) = \alpha(2, 1) + \beta(1, 0)$. On obtient $\alpha = -1$ $\beta = 1$. Puis :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

3) Le système différentiel s'écrit $X' = AX$ avec $X = {}^t(x, y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (notez la transposée...) Je rappelle qu'en fait $X(t)$ est « *plutôt* » une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On note $Y = P^{-1}X = {}^t(u, v)$

$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff Y' = P^{-1}X' = T\,\underbrace{P^{-1}X}_{Y} \iff \begin{cases} u' &= u - v \\ v' &= v \end{cases} \iff \begin{cases} u &= De^t - Cte^t \\ v &= Ce^t \end{cases}$$

Je n'ai pas mis les détails. On termine avec : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = PY = \begin{pmatrix} (2D + C)e^t - 2Cte^t \\ De^t - Cte^t \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} e^t - 2te^t \\ -te^t \end{pmatrix}$
La deuxième écriture vous montre (et prouve) que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, sev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. C'est du cours.

4) LE théorème de Cauchy linéaire (ou Cauchy-Lipschitz) nous donne l'existence et l'unité d'une solution pour une condition initiale donnée, ici $X(0) = {}^t(1, 1)$. JE trouve la question « *bizarrement posée* » : pour trouver les constantes, cad al solution, vous résolvez le système $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$. On trouve $C = 1$ et $D = 1$

X — Probabilités

CCINP PSI 2021 (lancement dé) **Détaillé**

Enoncé 169 Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1) Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminez la loi de N.

2) Pour tous $(k,n) \in [\![1;6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculez $P(X=k, N=n)$.

3) Calculez $P(X=k)$. En déduire la loi de X.

4) Les variables X et N sont-elles indépendantes?

BEOS 5961

1)

- Ici, l'expérience aléatoire est le lancer d'un dé de type succès / échec ou le succès est l'obtention d'un chiffre ≤ 6 de probabilité $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.
- Les expériences sont bien répétées indépendamment.
- La variable aléatoire N mesure le nombre de lancers obtenus jusqu'à la a réussite

Par conséquent, N suit une loi géométrique de paramètre p, $N \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{3}{5}\right)$.

2) pour tous $1 \leq k \leq 6$ et $n \geq 1$,

$$P\Big((X=k)\cap(N=n)\Big) = P\Big((X=k) \mid (N=n)\Big)\ P(N=n) = P\Big((X=k) \mid (N=1)\Big) \times P(N=n) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{5}$$

3) On applique la formule des probabilités totales à $(X=k)$ avec le système complet d'événements $\big((N=n)\big)_{n\geq 1}$:

$$P(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{5} = \frac{3}{30} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1/10}{1-2/5} = \frac{1}{6}$$

On aura reconnu une somme de série géométrique « *complète* ». X suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$

4) Les vas X et N sont indépendantes car pour tous $1 \leq k \leq 6$ et $n \geq 1$, on peut écrire :

$$P\Big((X=k)\cap(N=n)\Big) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{5} = P(X=k)\ \ P(N=n)$$

CCINP PSI 2021 (premier succès jetons distincts) **DÉTAILLÉ**

ENONCÉ 171 On dispose d'une urne qui contient 3 jetons numérotés 1,2,3 et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la va correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la va correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1) Déterminez la loi de Y.

2) Quelle est la loi de $Y-1$? En déduire l'espérance et la variance de Y.

3) Déterminez la loi de (Y,Z).

4) En déduire la loi de Z.

RMS 132-1182

1) On a clairement $Y(\Omega)=[\![2\,;+\infty]\!]$. Notons A_i (rp. B_i, C_i) l'événement « *On a tiré le jeton 1 au i*[e] *tirage* » (rp. « *le jeton 2* », « *le jeton 3* »). On peut alors écrire l'événement $(Y=2)$ qui signifie un jeton quelconque au 1[er] tirage et un autre au 2[e] tirage :

$$(Y=2)=(A_1\cap B_2)\cup(A_1\cap C_2)\cup(C_1\cap B_2)\cup(C_1\cap A_2)\cup(B_1\cap A_2)\cup(B_1\cap C_2)$$

$$\begin{aligned}P\big((Y=2)\big)&\overbrace{=}^{(2)}P\big((A_1\cap B_2)\big)+P\big((A_1\cap C_2)\big)+P\big((C_1\cap B_2)\big)+P\big((C_1\cap A_2)\big)+P\big((B_1\cap A_2)\big)+P\big((B_1\cap C_2)\big)\\&\overbrace{=}^{(3)}P(A_1)P(B_2)+P(A_1)P(C_2)+P(C_1)P(B_2)+P(C_1)P(A_2)+P(B_1)P(A_2)+P(B_1)P(C_2)\\&=\frac13\times\frac13+\frac13\times\frac13+\frac13\times\frac13+\frac13\times\frac13+\frac13\times\frac13+\frac13\times\frac13=\frac69=\frac23\end{aligned}$$

- **(1)** Ces 6 événements (entre parenthèses) sont visiblement incompatibles (si l'un se produit, pas l'autre!)
- **(2)** D'après l'hypothèse de tirage avec remise, les A_i,B_i,C_i sont indépendants de A_j,B_j,C_j avec $j\neq i$

Le traitement de l'événement $(Y=3)$ est similaire

$$(Y=3)=(A_1\cap A_2\cap B_3)\cup(A_1\cap A_2\cap C_3)\cup(C_1\cap C_2\cap B_3)\cup(C_1\cap C_2\cap A_3)\cup(B_1\cap B_2\cap A_3)\cup(B_1\cap B_2\cap C_3)$$

$$P\big((Y=3)\big)=6\times P\big((A_1\cap A_2\cap B_3)\big)=6\times\frac{1}{3^3}=\frac{2}{3^2}$$

Un raisonnement analogue amène $P\big((Y=n)\big)=\dfrac{2}{3^{n-1}}$

2) On pose $U=Y-1$. Premièrement $U(\Omega)=[\![1\,;+\infty]\!]$. Ensuite :

$$\forall\, n\geq 1,\ P(U=n)=P(Y=n+1)=\frac{2}{3^n}=\left(1-\frac23\right)^{n-1}\frac23$$

Il vient que U suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac23$. On sait alors $E(U)=\frac1p=\frac32$ et $V(U)=\frac{1-p}{p^2}=\frac34$. Puis $E(Y)=E(U)+1=\frac52$ et $V(Y)=V(U)=\frac34$.

Remarque : Je rappelle que $E(aX+b)=aE(X)+b$ et $V(aX+b)=a^2V(X)$.

3) Déterminons $P(Y=n,Z=m)$ pour $n\geq 2$ et $m\geq 3$. On peut déjà remarquer que si $m\leq n$, cette probabilité est ***nulle*** (je vous laisse y réfléchir). Pour tous $m>n\geq 2$:

$$P\big((Y=n)\cap(Z=m)\big)=P\big((Z=m)\mid(Y=n)\big)\times P\big((Y=n)\big)=\left(\frac23\right)^{m-n-1}\frac13\times\frac{2}{3^{n-1}}=\frac{2^{m-n}}{3^{m-1}}$$

Puisque entre « *l'instant* » $n+1$ et $m-1$ (« *durée* » $m-1-(n+1)+1=m-n-1$), on tire nécessairement l'un des deux jetons tiré au début, soit probabilité $\frac23$ et au « *temps* » m on tire le dernier jeton, probabilité $\frac13$.

4) Z étant une loi marginale du couple de variables aléatoires (Y, Z), on l'obtient par la formule des probabiltés totales et le système complet des événements $\big((Y = n)\big)_{n \geq 2}$:

$$\begin{aligned}\forall\, m \geq 3,\ P(Z = m) &= \sum_{n=2}^{+\infty} P\big((Y = n) \cap (Z = m)\big) = \sum_{n=2}^{m-1} P\big((Y = n) \cap (Z = m)\big) = \sum_{n=2}^{m-1} \frac{2^{m-n}}{3^{m-1}} \\ &= \frac{2^m}{3^{m-1}} \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{2^n} = \frac{2^{m-2}}{3^{m-1}} \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{2^{m-2}}{3^{m-1}} \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{2^{m-2}}{3^{m-1}} \, \frac{1 - (1/2)^{m-2}}{1 - 1/2} = \boxed{\frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}}}\end{aligned}$$

CCINP PSI 2021 | CCPBQ MP 2021-2015 (appels téléphoniques) ✷

Enoncé 173 Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p, avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus après une série d'appels.

1) Donnez la loi de X. Justifier. Précisez $E(X)$ et $V(X)$.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels et Z au nombre total de clients joints.

(i) Exprimez Z à l'aide de$X$ et$Y$. Précisez les valeurs possibles pour Z (**MP :** Question absente)

(ii) Calculez $P(Z=0)$. Montrez $P(Z=1) = npq^{2n-2}(1+q)$ (**MP :** Question absente)

(iii) Soit $i \in [[0,n]]$. Déterminez $P(Y=k \mid X=i)$.

(iv) Montrez $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$ puis $P(Z=i) = \binom{n}{i}(1-q^2)^i(q^2)^{n-i}$. En déduire la loi de Z. (**MP :**

(ii) Prouvez que Z suit une loi binomiale dont on donnera le paramètre. *Indic :* on pourra utiliser, sans prouver, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$

(iii) Espérance et variance de Z ?)

RMS 132-1188 | BQCCPMP 2021-98 2015-98 *1+1 concours*

1)

- L'expérience aléatoire est ici appeler un correspondant où le succès est la réussite de l'appel, probabilité p
- Les appels entre les différents correspondants sont indépendants (c'est dans l'énoncé).
- X représente le nombre de correspondants obtenu après une série d'appels (aux n correspondants)

Par conséquent X suit la loi binomiale de paramètres n et p : .$X \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n,p,\big)$. On sait alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

2) Y est le nombre d'appels réussis, lors de la seconde phase, auprès des $n-X$ correspondants non obtenus, Z est le nombre total de correspondants obtenus lors de ces 2 séries d'appels, soit $Z = X+Y$. Les valeurs possibles pour Z sont tous les entiers entre 0 et n, $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

Par positivité du nombre d'appels, $(Z = X+Y = 0) = (X=0)\bigcap(Y=0)$, puis :

$$P(Z=0) = P(X=0)\ P\big(\ (Y=0) \mid (X=0)\big) \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \binom{n}{0}p^0(1-p)^n\ \times(1-p)^n = (1-p)^{2n} = q^{2n}$$

- **(1)** Sachant $(X=0)$, on appelle n correspondants et l'événement $(Y=0)$ signifie alors n échecs, soit $(1-p)^n$

$$\begin{aligned}
P(Z=1) &= P\Big(\big((X=1)\cap(Y=0)\big)\bigcup\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\ \Big) \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} P\big((X=1)\cap(Y=0)\big) + P\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\\
&= P(X=1)P\big(\ (Y=0) \mid (X=1)\big) + P(X=0)\ P\big(\ (Y=1) \mid (X=0)\big)\\
&= \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}\ P\big(\ (Y=0) \mid (X=1)\big) + \binom{n}{0}(1-p)^n\ P\big(\ (Y=1) \mid (X=0)\big)\\
&\overbrace{=}^{\textbf{(2)}} np(1-p)^{n-1}\ (1-p)^{n-1} + (1-p)^n\ np(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{2n-2}(2-p) = npq^{2n-2}(1+q)
\end{aligned}$$

- **(1)** In compatibilité des 2 événements, car par exemple, si on a $(X=1)$ on n'a pas$(X=0)$
- **(2)** Sachant $(X=1)$, on appelle $n-1$ correspondants et l'événement $(Y=0)$ signifie alors $n-1$ échecs, soit $(1-p)^{n-1}$

Sachant $(X=0)$, on appelle n correspondants et l'événement $(Y=1)$ signifie alors $n-1$ échecs et 1 réussite, soit $np(1-p)^{n-1}$

Sachant $(X=i)$, on appelle $n-i$ correspondants et l'événement $(Y=k)$ signifie alors $n-i-k$ échecs et k réussites, soit $\begin{pmatrix} n-i-k \\ k \end{pmatrix}(1-p)^{n-k-i}p^k$. En fait $Y\ /(X=i) \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n-i\,,\,p\big)$

$$\begin{pmatrix} n-i \\ k-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{(n-i)!}{(k-i)!\,(n-k)!}\,\frac{n!}{(n-i)!\,i!} = \frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!} \qquad \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!}$$

$\big((X=k)\big)_{0\le k\le n}$ est un système complet d'événements, on applique la formule des probabilité totales à $(Z=i)$:

$$\begin{aligned} P(Z=i) &= \sum_{k=0}^{n} P\big((Z=i)\mid(X=k)\big)P(X=k) = \sum_{k=0}^{i} P\big((Y=i-k)\mid(X=k)\big)\times P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{i}\begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix}p^{i-k}(1-p)^{n-k-(i-k)}\times\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}p^k(1-p)^{n-k} = p^i\sum_{k=0}^{i}\begin{pmatrix} n-k \\ i-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}q^{2n-i-k} \\ &= p^i\sum_{k=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}q^{2n-i-k} = p^i q^{2n-i}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\sum_{k=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}q^{-k} = p^i q^{2n-i}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\left(1+\frac{1}{q}\right)^i \\ &= \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}p^i q^{2n-2i}(1+q)^i = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}\big(p(1+q)\big)^i\,\big(q^2\big)^{n-i} \end{aligned}$$

$Z \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n\,,\,p(1+q)\big)$ car on a $p(1+q) = p(2-p) = 1-(1-p)^2 = 1-q^2$.

CCP PSI 2021-2019-2018 (variable aléatoire $Z = X + Y + 1$) **Détaillé**

Enoncé 179 Soit X et Y 2 variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Déterminez l'espérance et la variance de X. (**201x :** Pas la variance) .

2) Calculez la fonction génératrice de X.

3) En déduire la loi de X. (**201x :** Reconnaître la loi) .

RMS 132-1190 129-1207 | Odlt 26.209 *1+2 concours*

1) Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X) + E(Y) + E(1) = 2E(X) + 1 = \frac{1}{p}$, puisque X et Y suiven la même loi. L'indépendance ne sert pas ici. On en tire $\boxed{E(X) = \dfrac{1-p}{2p}}$

Par indépendance, pour la variance on écrit $V(Z) = V(X) + V(Y) = 2V(X) = \frac{1-p}{p^2}$, d'où $\boxed{V(X) = \dfrac{1-p}{2p^2}}$

2)

$$G_Z(t) \overset{(1)}{\overbrace{=}} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p t^n = pt \sum_{n=1}^{+\infty} \big((1-p)t\big)^{n-1} \overset{(2)}{\overbrace{=}} \frac{pt}{1-(1-p)t}$$
$$\overset{(3)}{\overbrace{=}} E\big(t^{X+Y+1}\big) \overset{(4)}{\overbrace{=}} E\big(t^X\ t^Y\ t\big) \overset{(5)}{\overbrace{=}} t\ E(t^X)\ E(t^Y) = t\ \big(G_X(t)\big)^2$$

- **(1)** On calcule la fonction génératrice d'une va géométrique de paramètre p
- **(2)** Ici, on a bien ***tous*** les termes de la série géométrique
- **(3)** On calcule d'une autre façon, $G_Z(t) = E(t^Z)$ est du cours
- **(4)** Ces propriétés de « *puissance* » sont valides pour t quelconque, même $t \leq 0$, car X, Y sont à valeurs entières.
- **(5)** Propriété de l'espérance due à la linéarité (on sort le t) et à l'indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$ pour tous f, g (c'est du cours, lemme des coalitions pour 2). Ici $f(x) = g(x) = t^x$

On en déduit $\boxed{G_X(t) = +\sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}}$. le $+$ est justifié (plutôt que le $-$) car la fonction génératrice est ≥ 0 pour $t \geq 0$ (comme toute va à valeur entière, je vous laisse y réfléchir)

3) En se rappelant $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$, on peut « *retrouver* » le coefficient $P(X=n)$ par un développement en série entière (on pourrait aussi théoriquement par $\frac{1}{n!}(G_X(t))^{(n)}(0)$, cours sur les séries entières, mais c'est moins usité).

Je rappelle le développement en série entière de la « *racine* » $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et ses différentes écritures (essayez de les comprendre), sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \big(1+x\big)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}-1\big)\big(-\frac{1}{2}-2\big)\dots\big(-\frac{1}{2}-n+1\big)}{n!}\ x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\big(-\frac{3}{2}\big)\big(-\frac{5}{2}\big)\dots\big(-\frac{2n-1}{2}\big)}{n!}\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{(2n-1)!!}{2^n\ n!}\ x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ (2n)!}{\big((2n)(2n-2)\dots2\big)\ 2^n\ n!}\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ (2n)!}{2^{2n}\ (n!)^2}\ x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n}\ x^n
\end{aligned}$$

La dernière formule s'appelle formule du ***binôme négatif***, elle n'est pas du tout à votre programme (pour un coefficient binomial $\binom{n}{p}$, vous devez avoir n, p entiers et $0 \leq p \leq n$. Néanmoins elle est compréhensible : regardez la première ligne et si vous connaissez $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$, vous pouvez la comprendre ainsi son « *lien visuel* » avec la ***vraie*** formule du binôme proprement dite. Revenons à notre exo :

$$G_X(t) = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \left(-(1-p)t\right)^n = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, t^n$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit $\boxed{P(X=n) = \dfrac{\sqrt{p}\,(1-p)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}}$

CCINP PSI 2021 (tirage nombre pair de boules dans une urne)

ENONCÉ 188 Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1) Soit B_i l'événement « *on tire i boules blanches* ». Calculez $P(B_i)$

2) Montrez $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}x^{2i}=\frac{1}{2}\big((1+x)^n+(1-x)^n\big)$.

3) Calculez la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

RMS 132-1183

1)

- L'expérience réalisée est le tirage dans une urne où le ***succès*** est le tirage d'une boule blanche, probabilité $p=\frac{a}{a+b}$.
- Le tirage est avec remise, les expériences sont répétées ***indépendamment***.
- Si on pose Y le nombre de succès en n tirages, on a alors que Y suit la ***loi binomiale*** de paramètre (n,p)

Par suite $\boxed{P(B_i)=P(Y=i)=\binom{n}{i}\left(\frac{a}{a+b}\right)^i\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i}=\binom{n}{i}\frac{a^i\,b^{n-i}}{(a+b)^n}}$

2) La bonne idée est de prendre l'égalité « *à l'envers* » et d'appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big((1+x)^n+(1-x)^n\big)&=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(2\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{ pair }=2m}}\binom{n}{k}x^k\Big)=\sum_{0\le 2m\le n}\binom{n}{2m}x^{2m}=\sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2m}x^{2m}\end{aligned}$$

3) Si B est l'événement « *tirer un nombre pair de boules blanches* », sous-entendu en n tirages, $B=\bigcup_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}B_{2i}$, puis :

$$\begin{aligned}P(B)&\overbrace{=}^{(1)}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}P(B_{2i})=\frac{1}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}a^{2i}b^{n-2i}=\frac{b^n}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}\left(\frac{a}{b}\right)^{2i}\\&\overbrace{=}^{(2)}\frac{b^n}{(a+b)^n}\,\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1-\frac{a}{b}\right)^n\right)=\frac{b^n}{2(a+b)^n}\left(\left(\frac{b+a}{b}\right)^n+\left(\frac{b-a}{b}\right)^n\right)=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n}\end{aligned}$$

- **(1)** Les événements B_{2i} sont clairement incompatibles.
- **(2)** Question Q2

CCP PSI 2021 (probabilité matrice 2×2 diagonalisable) **Détaillé**

Enoncé 190

Soient X, Y 2 vas indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. On pose $M = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

1) En développant de 2 façons différentes $(1+X)^{2n}$, montrez $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2) Calculez la probabilité pour que $X = Y$ (**RMS** : Question absente)

3) Calculez la probabilité pour que la matrice soit diagonalisable.

Yassine Kalloo 2021 RMS 132-1185

1) On regarde le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n} = (1+X)^n\,(1+X)^n$ en se servant de la formule-produit d'un polynôme, cad $\text{Coef}(P\times Q, X^i) = \sum_{k=0}^{i} \text{Coef}(P, X^k)\times \text{Coef}(Q, X^{i-k})$ et de la formule du binôme de Newton :

- Le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$.
- Le coefficient de X^n dans $(1+X)^n\,(1+X)^n$ est $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

2) Les va X et Y sont à valeurs dans $[\![0\,;n]\!]$, par conséquent :

$$P\big(X=Y\big) = P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{(X=k)\cap(Y=k)}_{U_k}\Big) \overbrace{=}^{(1)} \sum_{k=0}^{n} P\Big((X=k)\cap(Y=k)\Big) \overbrace{=}^{(2)} \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\times P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 p^{2k}(1-p)^{2n-2k} = (1-p)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (1-p)^{2n}\binom{2n}{n}$$

- **(1)** Cette sommation résulte du fait que les événements U_k sont incompatibles entre eux : $U_k\cap U_m = \emptyset$ (pour $k\neq m$). En effet si $\omega\in\Omega$ vérifie $\omega\in U_k$, il vérifie $X(\omega)=k$ et donc ne vérifie pas $X(\omega)=m$, soit $\omega\notin U_m$.
- **(2)** Les va X et Y étant indépendantes, les événements $(X=k)$ et $(Y=k)$ sont aussi indépendants : on peut donc en faire le produit

3) Avec x, y réels, la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ vérifie :

- Si $x\neq y$ la matrice A est d'ordre 2 et possède 2 vp distinctes, elle est donc diagonalisable.
- Si $x=y$, la matrice M ne possédant qu'une seule vp (x d'ordre 2) est diagonalisable ssi c'est $M = xI$, ce qui n'est visiblement pas le cas (à cause du 1...)

Par suite A est diagonalisable ssi $x\neq y$.

M est donc diagonalisable avec la probabilité $P(X\neq Y) = 1-P(X=Y) = \boxed{1-(1-p)^{2n}\binom{2n}{n}}$.

CCP PSI 2021-2018-2017 (suite de fonctions de répartition) ☜ **Détaillé**

Enoncé 192 On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. On note X_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième lancer. On pose $M_n = \max\limits_{1\leq k\leq n} X_k$ et $m_n = \min\limits_{1\leq k\leq n} X_k$.

1) Donnez la loi des X_k et leur fonction de répartition F.

2) Exprimez la fonction de répartition F_n de M_n à l'aide de F.

3) Déterminez la limite simple de la suite (F_n). La convergence est-elle uniforme ?

4) Déterminez la fonction de répartition G_n de m_n.

Romain Desloges 2021 | RMS 129-1210 128-1380 *1+2 concours*

1) On a immédiatement $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\llbracket 1;6\rrbracket\right)$. Par définition $F(x) = P(X_1 \leq x)$ qui donne, si $x < 1$, $F(x) = 0$, si $i \leq x < i+1, F(x) = \frac{i}{6}$, pour $1 \leq i \leq 5$ et pour $x \geq 6, F(x) = 1$.

Remarque : La fonction de répartition, pour les vas discrètes, est croissante, en escalier avec des sauts à chaque $x \in X(\Omega)$. « *Avant strictement* » le premier, elle vaut 0, « *après le dernier* » (si c'est possible, sinon c'est à la limite), elle vaut 1. Je n'ai pas trop le temps de détailler, j'espère que vous suivez.

2) On utilise la propriété mathématique $\max(x, y) \leq t \iff x \leq t$ ***et*** $y \leq t$ ce qui donne en probas une intersection. Par suite :

$$F_n(x) = P(M_n \leq x) = P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \leq x\right) = P\left(()\cap_{k=1}^{n}(X_k \leq x)\right) \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \left(F(x)\right)^n$$

- **(1)** Les événements $(X_k \leq x)$ sont indépendants par indépendance des X_k.
- **(2)** Les X_k étant i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées), elles ont même loi, même espérance, même variance, même fonction de répartition...

3) En se servant de Q1 : si $x < 1$, $F_n(x) = 0$, si $i \leq x < i+1, F(x) = \left(\frac{i}{6}\right)^n$, pour $1 \leq i \leq 5$ et pour $x \geq 6, F(x) = 1^n = 1$. Il y a donc immédiatement ***convergence simple sur*** $\mathbb{R}$ vers la fonction f qui vaut 0 si $x < 6$ et 1 sinon. C'est la ***fonction indicatrice*** $\mathbf{1}_{[6,+\infty[}$ (au programme).

Pour la convergence uniforme (sur ? ce n'est pas demandé), on doit évaluer si $\|F_n - F\|_{\infty\, I} \to 0$, avec $n \to +\infty$. Avec $I = \mathbb{R}$, on a (je vous laisse y réfléchir) $\|F_n - f\|_{\infty\,\mathbb{R}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$. Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

4)

$$G_n(x) = P(m_n \leq x) = 1 - P(m_n > x) = 1 - P\left(\cap_{k=1}^{n}(X_k > x)\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n$$

On a utilisé $\inf(x, y) > z$ ssi $x > z$ ***et*** $y > z$.